

BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

Herausgeber:

E. BRIESKORN, J. FRÉHSE, ST. HILDEBRANDT,
F. HIRZEBRUCH, G. HARDER, W. KLINGENBERG, R. LEIS,
I. LIEB, E. PESCHL, H. UNGER, W. VOGEL, H. WERNER

Nr. 134

Rolf Mulczinski

Eine neue algebraische Methode
zur Untersuchung von Vektorbündeln
auf der projektiven Ebene

BONN 1981

EINE NEUE ALGEBRAISCHE METHODE
ZUR UNTERSUCHUNG VON VEKTORBÜNDELN
AUF DER PROJEKTIVEN EBENE

Schrift zur Erlangung des Doktorgrades an der
mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelm Universität
in Bonn

von Rolf Mulczinski aus Kiel
Berlin 1978

Verzeichnis der Abschnitte:

Abschnitt	Seite
E. Einleitung: Klassische Begriffe und Inhaltsangabe	1
O. Grundlegende Begriffe und Tatsachen	8
1. Geraden- und Differentialbündel auf projektiven Räumen	12
2. Der Zusammenhang zwischen Vektorbündeln und Kroneckermoduln	17
3. Beziehungen zu klassischen Resultaten	27
4. Die abgeleiteten Bündel eines polynomialen Vektorbündels	40
5. Klassifikationsprobleme für Vektorbündel auf der projektiven Ebene	56
A. Anhang: Einige Schritte hin zur Klassifikation der Endomorphismen von projektiven Räumen	75
Literaturangaben	84
Index	86
Zeichen	88

Einleitung:

Klassische Begriffe und Inhaltsangabe

In dieser Arbeit stellen wir eine neue algebraische Methode zur Untersuchung von Vektorbündeln, aber auch beliebigen kohärenten Moduln auf projektiven Räumen P_n vor. Um die Einführung des wesentlichen mit kohärenten P_n -Moduln zusammenhängenden Begriffes, des Kroneckermoduls, zu motivieren, wollen wir jetzt an die klassischen Resultate von SERRE erinnern.

Sei Grad^n die Kategorie der endlich erzeugten graduierten Moduln über der graduierten k -Algebra der Polynome $k[x_0, \dots, x_n]$, wobei k ein algebraisch abgeschlossener Körper sei. Aus einem Modul M in Grad^n können wir auf folgende Weise einen P_n -Modul \mathcal{F} konstruieren: Wir definieren die Schnitte $\Gamma(P_{nf}, \mathcal{F})$ von \mathcal{F} über der offenen Menge P_{nf} von P_n der Punkte, wo die homogene Funktion $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ nicht verschwindet, als die 0 -te Komponente $(M_f)_0$ der Lokalisierung M_f von M bezüglich der Menge $\{1, f, f^2, f^3, \dots\}$. Dadurch ist bis auf eindeutige Isomorphie ein kohärenter P_n -Modul \mathcal{F} bestimmt.

Insbesondere ist dem Modul $k[x_0, \dots, x_n](m)$, den wir aus $k[x_0, \dots, x_n]$ durch Verschieben der Gradierung erhalten, der lokalfreie kohärente P_n -Modul $\mathcal{O}(m)$ zugeordnet, als Geradenbündel eine Potenz des Hopfbündels bei $m < 0$. Wenn wir mit $\mathcal{F}(m)$ das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)$ und mit $\Gamma(\mathcal{F})$ die globalen Schnitte von \mathcal{F} bezeichnen, so ist für einen kohärenten P_n -Modul \mathcal{F} der Vektorraum $X(\mathcal{F}) = \coprod_{m \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{F}(m))$ ein endlich erzeugter $k[x_0, \dots, x_n]$ -Modul, wenn er mit der natürlichen Multiplikation versehen wird, die folgendermaßen definiert ist: Wir fassen x_1 als Schnitt von $\mathcal{O}(1)$ auf und definieren x_1^s für s in $\Gamma(\mathcal{F}(m))$ als den Schnitt $x_1 \otimes s$ von $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{F}(m) = \mathcal{F}(m+1)$.

Auf diese Weise erhalten wir zwei Funktoren $\mathcal{A}: \text{Grad}^n \rightarrow \text{Mod}$ und $X: \text{Mod} \rightarrow \text{Grad}^n$, wobei Mod die Kategorie der kohärenten \mathbb{P}_n -Modulgarben bezeichnet. Die Konstruktion \mathcal{A} von \mathbb{P}_n -Moduln hängt aber nicht von den homogenen Komponenten vom Grad kleiner als eine beliebige Konstante ab, und andererseits gibt es Moduln mit $X(\mathcal{F})_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ kleiner als eine beliebige Konstante. Daher sind die Funktoren \mathcal{A}, X erst dann "invers", wenn wir in Grad^n Objekte und Morphismen identifizieren, die in allen homogenen Komponenten genügend hohen Grades übereinstimmen.

Diese Identifizierung in Grad^n ist aber rein theoretisch und praktisch arbeitet man mit den Objekten in Grad^n . Dann aber kann es vorkommen, daß z.B. ein unzerlegbarer graduierter Modul M einen zerlegbaren \mathbb{P}_n -Modul $\mathcal{A}(M)$ induziert. Um jedoch von der Notwendigkeit der Klassenbildung loszukommen, muß man sich in jedem Fall auf \mathbb{P}_n -Moduln \mathcal{F} beschränken, die schon aus ihren Schnitten $\Gamma(\mathcal{F}(m))$ für m kleiner als eine Konstante konstruierbar sind. Zum Beispiel besitzt die Unterkategorie \mathcal{A}_0^n von Mod^n der lokalfreien global erzeugten \mathbb{P}_n -Moduln \mathcal{F} , wo die höhere Kohomologie der $\mathcal{F}(m)$ für $m \geq -n$ verschwindet, diese Eigenschaft, und wir werden zeigen, daß ein solcher \mathbb{P}_n -Modul \mathcal{F} schon durch zwei Komponenten von $X(\mathcal{F})$, z.B. durch $\Gamma(\mathcal{F}(-1))$ und $\Gamma(\mathcal{F})$ bestimmt ist, zusammen mit der Multiplikation durch die $x_i \in k[x_0, \dots, x_n]$, die $n+1$ lineare Abbildungen $x_i: \Gamma(\mathcal{F}(-1)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ induzieren. Solch ein Objekt von zwei Vektorräumen V und W mit einer endlichen Zahl k von linearen Abbildungen $V \rightarrow W$ heißt Kroneckermodul mit k Pfeilen.

Wir können also jedem kohärenten \mathbb{P}_n -Modul \mathcal{F} einen Kroneckermodul $K(\mathcal{F})$ mit $n+1$ Pfeilen $\Gamma(\mathcal{F}(-1)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ zuordnen. Wir entwickeln auch ein Verfahren zur globalen Konstruktion von \mathbb{P}_n -Moduln $\mathcal{U}(X)$ aus Kron-

eckermoduln \mathcal{X} und zeigen, daß der Funktor \mathcal{K} auf einer Unterkategorie Mod_n^0 von Mod die \mathcal{V}_0^n enthält, eine volltreue Einbettung in die Kategorie der Kroneckermoduln induziert und "Schnitt" für den Funktor \mathcal{M} ist. Die Kategorie Mod_n^0 hat die Eigenschaft, daß es für jeden kohärenten \mathcal{O}_n -Modul \mathcal{F} ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\mathcal{F}(m)$ in Mod_n^0 liegt. Daher kann man sich auf Mod_n^0 beschränken, wenn man \mathcal{O}_n -Moduln nur bis auf Isomorphie betrachtet, da $\mathcal{F}(m)$ isomorph zu $\mathcal{G}(m)$ ist, genau wenn $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$.

Da wir vornehmlich an Fragen der Isomorphie von Vektorbündeln interessiert sind, untersuchen wir in dieser Arbeit Eigenschaften der Kroneckermoduln von Vektorbündeln in Mod_n^0 . Zunächst jedoch eine Erinnerung an die "klassischen" Methoden, ein quasiprojektives Schema von Isomorphieklassen von Vektorbündeln auf einer nichtsingulären projektiven Kurve \mathcal{X} zu konstruieren. Man konstruiert zuerst eine Familie oder ein Schema von Vektorbündeln mit einer darauf operierenden reductiven Gruppe so, daß ihre Bahnen genau die Isomorphieklassen sind. Dann studiert man die Gruppenoperation und kennzeichnet das offene Unterschema der "stabilen" Punkte, wofür ein "geometrischer" Quotient, das Modulschema, nach der Gruppenoperation existiert, d.h. im wesentlichen: ein universelles quasi-projektives Schema, dessen Punkte die Isomorphieklassen parametrisieren. [Mumford, GIT, 0.4]

Dabei werden drei wesentliche Eigenschaften von Bündeln auf projektiven Kurven verwendet:

1. Die Vektorbündel sind genau die torsionsfreien \mathcal{X} -Moduln.
2. Jedes Bündel \mathcal{F} hat eine Filtrierung $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$
... $\mathcal{F}_{r-1} \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, so daß $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_{1-1}$ ein Geradenbündel ist.
3. Bei Vorgabe der diskreten Invarianten Rang r und Grad c gibt es ein Schema von Bündeln vom Rang r und Grad c mit einer Modulgruppe.

Wir sind in der Lage, mit ähnlichen Methoden die stabilen ("besonders stabilen") Vektorbündel auf P_2 (für beliebige Ränge!) zu kennzeichnen. Leider gelingt eine geometrische Deutung des Stabilitätskriteriums (5.2) nur für spezielle (monomiale) Bündel (5.4). Die hier verwendeten Methoden sind jedoch sicher "ausbaufähig", nicht wahrscheinlich dagegen auf beliebige Bündel über P_n , da die zur Herleitung des Stabilitätskriteriums verwendeten drei zentralen Eigenschaften für P_n mit $n > 2$ sicher nicht gelten:

Den obigen Aussagen entsprechen folgendes:

1. Die Kroneckermoduln von Vektorbündeln sind genau die regulären Kroneckermoduln (3.5). (Für die Definition von "regulär" ist der Begriff der Torsionsfreiheit entscheidend. Außerdem ist klar, daß der Kroneckermodul eines Vektorbündels torsionsfrei ist, d.h. für $e_{+0} \in \Gamma(\mathcal{O}(1))$ und $x_{+0} \in \Gamma(F(-1))$ ist $e \cdot x \in \Gamma(F)$ nicht Null.) Dies gilt für alle P_n .
2. Jedes Bündel auf P_2 hat eine Folge $0 = F_{-1}, F_0, \dots, F_{m-1}, F_m = F$ von "abgeleiteten" Bündeln mit exakten Sequenzen $0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Y_1 \rightarrow F_{1-1}(1) \rightarrow F_1 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z_1 \rightarrow 0$. Der Beweis der Existenz in 4.1ff läßt leider nicht erkennen, wie sehr die Gültigkeit dieser Aussage mit der Regularität von $E \otimes \Gamma(F(-2)) \rightarrow \Gamma(F(-1))$ verknüpft ist und daß sie für $n > 2$ nicht gelten kann, z.B. ist $\mathcal{X}(\mathcal{Q}(3))$ auf P_3 nicht regulär.
3. Bei Vorgabe der Invarianten m (die "Stufe" von F) sowie $\dim Y_1$ und $\dim Z_1$ (4.3) gibt es ein Schema von Vektorbündeln (4.7) mit einer Modulgruppe, hier SL_k (5.1). Die Definition ist für alle Bündel nur auf P_2 möglich, da Punkt 2. nur für alle Bündel gilt, wenn $n = 2$ ist. $\dim Z_1$ ist der Rang des maximalen trivialen Summanden von F_1 und $\dim Y_1$ läßt sich offenbar durch die Ränge der F_j ausdrücken.

Grobe Übersicht über die Schritte und Ergebnisse unserer Untersuchungen:

Der erste Abschnitt dient der Festlegung der verwendeten Begriffe, insbesondere im Zusammenhang mit "P(E)-Modul" und "Vektorbündel". Hier finden wir auch Kriterien für die Exaktheit von Vektorbündelsequenzen und dafür, daß ein P(E)-Modul ein Bündel ist (0.7, 0.6), welches wir als durch die Familie seiner Fasern gegeben auffassen (0.5).

Der zweite Abschnitt stellt die immer wieder verwendeten Geradenbündel $\mathcal{O}(m)$ sowie die Differentialbündel $\wedge^k \Omega$ in der Sichtweise von Abschnitt 0. vor und gibt die sie verbindenden Erweiterungen an (1.6). Daraus ergeben sich eine kanonische Beschreibung der Schnitte von $\mathcal{O}(m)$ (1.4, 1.5) und Kohomologieeigenschaften dieser Bündel (1.5, 1.7).

Der dritte Abschnitt führt die Begriffe Schnitt- und Kroneckermodul ein. Hier konstruieren wir auch einen P(E)-Modul aus einem Kroneckermodul (bis 1.4). \mathcal{K} und \mathcal{M} sind adjungiert und induzieren daher einen Isomorphismus von Mod_0^n auf eine volle Unterkategorie der Kroneckermoduln (2.6, 2.7). Definition und erste Eigenschaften von Mod_0^n finden wir in 2.7, 2.8 und 2.9, insbesondere hat ein $F \in \text{Mod}_0^n$ eine "universelle" Auflösung durch Differentialbündel (2.6).

Im vierten Abschnitt leiten wir mit Hilfe dieser Eigenschaften von Mod_0^n das Zerfällungskriterium für Vektorbündel auf P_1 her (3.1) und führen die Gültigkeit des Satzes von Riemann-Roch-Hirzebruch über einem projektiven Schema \mathcal{X} auf die einer Gleichung zurück, in der nur noch die Toddpolynome von \mathcal{X} und P_n und das triviale Bündel vorkommen (3.2). Dann deuten wir die Serre-Dualität zwischen $\text{Ext}^n(F, \wedge^k \Omega)$ und $\Gamma(F)$ für F in Mod_0^n als den durch die universelle Auflösung gegebenen Isomorphismus (3.3).

In 3.4 schließlich beweisen wir, daß durch den Schnittfunktor auf $\mathcal{M}od$, eine Einbettung nach Grad^n gegeben ist. Wir können auch die Verschiebung und Einschränkung eines Kroneckermoduls entsprechend der eines $P(E)$ -Moduls definieren. Es gilt dann $\mathcal{K}(P(m)) = \mathcal{K}(F)(m)$ und $\mathcal{K}(F|_{P(E)}) = \mathcal{K}(F)|_E$. In 3.5 verwenden wir diese Begriffe, um ähnlich dem Beweis des Hilbertschen Syzigiensatzes die Kroneckermoduln zu charakterisieren, die Kroneckermodul eines Vektorbündels in \mathcal{V}_0^n sind.

Im fünften Abschnitt entwickeln wir den Begriff des polynomialen Bündels, definieren dessen Ableitungen, Stufen und universelle Erweiterungen in 4.2 und 4.3. Von 4.4 ab konstruieren wir zu gegebenem Polynom p eine Menge \mathcal{V}_p von polynomialen Vektorbündeln, so daß jedes Bündel mit Polynom p zu einem Bündel in \mathcal{V}_p isomorph ist (4.5, 4.6). In 4.7 beweisen wir, daß die \mathcal{V}_p Schemata sind und die Projektion $\mathcal{V}_p \rightarrow \mathcal{V}_{\Delta p}$ (Δ = "Ableitung") sich als Morphismus $F \mapsto (\text{Ableitung von } F)$ deuten läßt. In Theorem 4.7 werden außerdem Existenzkriterien für polynomialen Bündel angegeben. Als Folgerung ergibt sich, daß polynomialen Bündel vom Rang $< n$ in Geradenbündel zerfallen.

Der sechste Abschnitt ist der Frage nach der Isomorphie von Bündeln in \mathcal{V}_p gewidmet. Die Isomorphieklassen erkennen wir als Bahnen von SL_k , auf einem Unterschema einer Graßmannigfaltigkeit operierend (5.1), worauf wir die Frage diskutieren, ob sie sich als Punkte eines quasiprojektiven Schemas auffassen lassen. Eine algebraische Kennzeichnung der "guten" Isomorphieklassen steht in 5.2. Um sie geometrisch interpretieren zu können, beschränken wir uns auf monomiale Bündel. Das Stabilitätskriterium für solche Bündel geben wir in 5.4. Vergleichen wir es mit schon Bekanntem für Vektorbündel vom Rang 2 auf P_2 , erhalten wir einen Struktursatz für Bündel auf P_2 . Abschließend wird in 5.7 in dem speziellen Fall der in Stufe 1 homogenen Vektorbündel generisch ein Modulschema konstruiert. Diese Andeutung einer recht einfachen Konstruktions-

möglichkeit von Familien nicht isomorpher Vektorbündel nur mit Hilfe linearer Algebra stellt einen weiteren Vorteil unserer Methode dar.

Im Anhang verbinden wir die klassische Deutung eines Endomorphismus vom Grad d von \mathbb{P}_n als Surjektion $\mathcal{O}^{\oplus r}(\mathcal{O}(d)) \rightarrow \mathcal{O}(d)$ mit der universellen Auflösung von $\mathcal{O}((n+1)(d-1))$ und erhalten einen Morphismus $\text{End}_d(\mathbb{P}_n) \rightarrow \mathbb{P}(\text{Ext}^n(\mathcal{O}((n+1)d), \mathcal{O}))$, der ein Hauptfaserbündel bez. der Operation von $a \in \text{Aut}(\mathbb{P}_n)$ auf $\text{End}_d(\mathbb{P}_n)$ durch $f \mapsto a \cdot f$ induziert. Seine Deutung als Zuordnung $f \mapsto (\text{Funktionaldeterminante von } f)$ beweist, daß sein Bild geometrischer Quotient für die Operation ist, und außerdem seine Äquivarianz bez. derjenigen von $a \in \text{Aut}(\mathbb{P}_n)$ durch $f \mapsto f \cdot a$.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Kraft, der sich sehr um mich und mein Werk kümmerte, obwohl ich ihn erst in der Phase der Redaktionsarbeit um Betreuung als Doktorvater bat.

Da ich aus der aktuellen Forschung ausgeschlossen bin, bitte ich (dennoch!) um Zusendung von mit dieser Arbeit zusammenhängenden Fragen, Anregungen und Manuskripten an die untenige Adresse.

Bonn, 16.9.1977

Überarbeitete Fassung: 1.9.78

Überarbeiteter Anhang: 1.4.79

~~Rolf Mulaczinski~~
~~Taunusstraße 23~~

1000 Berlin 41

mulaczinski@guttstadt.eu

0. Grundlegende Begriffe und Tatsachen

Wir wählen uns einen festen Vektorraum E der Dimension $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) über einem festen Körper k . Üblicherweise besteht der projektive Raum als Menge aus allen eindimensionalen Unterräumen von E , sein Duales aus den Unterräumen der Kodimension 1 in E . Da die Räume sich nach Wahl einer Basis identifizieren lassen, ziehen wir es aus technischen Gründen vor, mit $P(E)$ den projektiven Raum über E der Dimension n zu bezeichnen, dessen Punkte H die Hyperebenen von E sind ($0 \in H$). Es gibt mehrere Möglichkeiten, $P(E)$ die Struktur eines algebraischen Schemas über k zu geben, wobei wir in dieser Arbeit den funktoriellen Standpunkt in [DG,I, insbes. 1.3.4 und 3.13] aus Gründen der Beweiseinfachheit vorziehen: Die wenigen Stellen, an denen wir uns entscheidend auf ihn stützen, dienen der exakten Reduktion auf die ohnehin offensichtliche Vorstellung, daß zur Konstruktion einer exakten Sequenz von Vektorbündeln die Konstruktion von exakten Vektorraumsequenzen über jedem Punkt $H \in P(E)$ vonnöten ist.

Auf dieselbe, nämlich funktorielle Weise kann man die Menge E strukturieren und nennt sie den affinen Raum über E . $P(E)$ und $A(E)$ sind also Objekte der Kategorie der algebraischen Schemata \mathcal{X} über k , deren Pfeile wir Morphismen nennen.

0.1 Wenn wir von Punkten von \mathcal{X} sprechen, so meinen wir ein Element des Funktors \mathcal{X} , ausgewertet an einer Stelle, also in einem etwas anderen Sinne als im geometrisch anschaulichen oder in [DG,I,1.4.2]. Wenn der Leser k als algebraisch abgeschlossen voraussetzt, was wir später ohnehin tun, sind der Standpunkt der geometrischen Räume und der funktorielle äquivalent [DG,I,3.6.9]. Wenn wir von Punkten reden, dürfen wir uns also die abgeschlossenen Punkte des topologischen Raumes vorstellen,

wollen wir diese Vorstellung betonen, verwenden wir den Begriff "geometrischer Punkt". Der Begriff rationaler Punkt sei den Punkten mit Restklassenkörper k vorbehalten.

0.2 Definition

Ist \mathcal{X} ein festes algebraisches k -Schema, so nennen wir Vektorbündel einen Morphismus $F \xrightarrow{p} \mathcal{X}$, wobei also F ein algebraisches k -Schema ist, mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Fasern $F(x) = p^{-1}(x)$ über jedem geometrischen Punkt von \mathcal{X} tragen eine Vektorraumstruktur über dem Restkl.-körper.
2. \mathcal{X} besitzt eine Überdeckung mit offenen Unterschemata \mathcal{U} , so daß $p^{-1}(\mathcal{U})$ und $\mathcal{U} \times A(k^r)$ über \mathcal{X} isomorph sind für festes $r \in \mathbb{N}$. (lokaltrivial)

Die Zahl r heißt der Rang von F . (F als Abkürzung für $p: F \rightarrow \mathcal{X}$)

0.3 Ein Vektorbündel kann man auch als lokalfreie Modulgarbe auffassen. Die übliche Verklebeeigenschaft [Godement, II, 1.1] bezeichnen wir mit dem Adjektiv lokal. Dann lautet die Definition einer Modulgarbe über \mathcal{X} , kurz \mathcal{X} -Modul, in der Sprache der Funktoren folgendermaßen:

Definition:

Ein \mathcal{X} -Modul F ist ein lokaler \mathcal{X} -Funktork $F \xrightarrow{p} \mathcal{X}$ so daß eine Addition und eine Skalarmultiplikation in der Faser $p^{-1}(x)$ jedes Punktes x von \mathcal{X} gegeben ist, die die Faser zu einem Modul machen (, der funktorell bei Ring-erweiterungen ist,) und die global über \mathcal{X} definiert sind.
(Add: $F \times_{\mathcal{X}} F \rightarrow F$, Sk: $A(k) \times F \rightarrow F$)

Die \mathcal{X} -Moduln bilden eine Kategorie $\text{Mod}^{\mathcal{X}}$ deren Pfeile, das sind Morphismen über \mathcal{X} , die mit der Modulstruktur in den Fasern verträglich sind, wir Homomorphismen von \mathcal{X} -Moduln nennen. Ein Homomorphismus wird

also durch eine Familie von Modulhomomorphismen $F(x) \rightarrow G(x)$ über X gegeben, die funktoriell sind, d.h. verträglich bei Skalaerweiterungen.

0.4 Die Kategorie der X -Moduln ist abelsch. Wir haben also Kerne und Kokerne und können exakte Sequenzen definieren. So setzen wir, auch äquivalent zur üblichen Sprechweise, mit dem Halmbegriff fest: Eine Sequenz von X -Moduln ist exakt, wenn sie über jedem geometrischen Punkt von X eine exakte Sequenz der Halme über x induziert. Das bedeutet aber nicht, daß über jeder Faser eine exakte Sequenz induziert wird, wenngleich dies für Vektorbündesequenzen richtig ist (0.7).

Monomorphismen bzw. Epimorphismen zwischen X -Moduln sind solche Homomorphismen, die zwischen den Halmen eine Modulinjektion bzw. -surjektion induzieren. Monomorphismen nennen wir deswegen auch Injektionen von X -Moduln. Ein Monomorphismus, der über allen Fasern injektiv ist, heißt faserweise Injektion. Epimorphismen nennen wir auch Surjektionen von X -Moduln. Surjektionen sind immer faserweise surjektiv (Lemma von Nakayama).

0.5 Da jedes algebraische Schema F über X lokal ist, läßt sich aus einem Vektorbündel im Sinne der Definition 0.2 ein X -Modul machen, dessen Fasern alle lokalfreie Moduln sind, über geometrischen Punkten natürlich Vektorräume. Wir erhalten die leicht zu beweisende Charakterisierung:

Lemma:

Ein X -Modul ist genau dann ein Vektorbündel vom Rang r , wenn alle seine Fasern projektive Moduln vom Rang r sind.

Auf diese Weise fassen wir die Vektorbündel als volle Unterkategorie \mathcal{V}_X^* der X -Moduln auf und nennen die Pfeile zwischen ihnen auch Homomorphismen.

Bemerkung:

Wollen wir ein Vektorbündel über \mathcal{X} angeben, so ist also die Angabe einer Familie von endlich erzeugten projektiven Moduln über \mathcal{X} ausreichend, welche funktoriell ist. Z.B. ist das triviale Bündel vom Rang r über \mathcal{X} folgendermaßen definiert:

Über einem Punkt $x : \text{Spec } A \rightarrow \mathcal{X}$ wählen wir als Faser den A -Modul A^r , mit anderen Zeichen: $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^r = \mathcal{X} \times A(k^F)$.

0.6 Entsprechend der Begriffsbildung von 0.4 haben wir Injektionen, Surjektionen und faserweise Injektionen von Vektorbündeln. Die Unterkategorie der Vektorbündel über \mathcal{X} ist aber nicht abelsch, d.h. Kokern von Bündelhomomorphismen sind i.a. keine Vektorbündel. Wegen der lokalen Trivialität gilt jedoch:

Lemma:

Der Kokern einer faserweisen Injektion von Vektorbündeln ist ein Vektorbündel.

Hieraus schließen wir leicht, daß eine Sequenz von Vektorbündeln genau dann exakt ist, wenn sie faserweise exakt ist. Außerdem ist mit Hilfe von Lemma 0.5 klar, daß der Kern einer Surjektion zwischen Vektorbündeln wieder ein Bündel ist.

0.7 Aus diesen Überlegungen schließen wir leicht auf das Lemma:

Ein Komplex $0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_m \rightarrow 0$ von Vektorbündeln (d.h. Bild \subset Kern) ist genau dann exakt, wenn er in den Fasern über allen geometrischen Punkten exakt ist.

Wir können aus \mathcal{X} -Moduln F und G über das Tensorprodukt, das Duale, die m -te symmetrische und die m -te äußere Potenz neue \mathcal{X} -Moduln machen, deren Fasern über einem Punkt x dann folgendermaßen definiert sind: $(F \otimes G)(x) := F(x) \otimes G(x)$, $F^*(x) := F(x)^*$, $S^m(F)(x) := S^m(F(x))$ und $\wedge^m F(x) := \wedge^m(F(x))$.

Nach Lemma 0.5 sind alle diese Moduln Vektorbündel, wenn F und G es sind. Wenn $G = \mathcal{X} \times \mathbb{A}(V)$ ist, schreiben wir auch $F \otimes V$ für $F \otimes G$ (V ein Vektorraum der Dimension r), d.h. $F \otimes V \cong F^r$ (direkte Summe) nach Wahl einer Basis. Wenn L ein Geradenbündel ist, d.h. ein Vektorbündel vom Rang 1, gilt $S^m(L \otimes F) = L^{\otimes m} \otimes S^m(F)$ und $\wedge^m(L \otimes F) = L^{\otimes m} \otimes \wedge^m F$ auf kanonische Art.

1. Geraden- und Differentialbündel auf projektiven Räumen

1.1 Nach Bemerkung 0.5 ist es klar, daß durch die Familie von Hyperebenen H als Faser über H als Punkt von $\mathbb{P}(E)$ ein Vektorbündel definiert ist, das tautologische Bündel T . Nach Definition 0.3 (Schlußbemerkung) und 0.4 haben wir eine kanonische faserweise Injektion $T \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \otimes E$ durch die Inklusionen der Hyperebenen in $\mathbb{A}(E)$, so daß der Kokern nach Lemma 0.6 ein Vektorbündel, aus Dimensionsgründen ein Geradenbündel definiert, das wir mit $\mathcal{O}(1)$ bezeichnen. Das Duale (0.7) nennen wir $\mathcal{O}(-1)$, $\mathcal{O}(1)^{\otimes m}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(m)$ und $\mathcal{O}(-1)^{\otimes m}$ mit $\mathcal{O}(-m)$ für $m > 0$, $\mathcal{O}(0) := \mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$. Die Fasern über rationalen Punkten von $\mathcal{O}(m)$ sind $(E/H)^{\otimes m}$ für $m > 0$ und $(E/H)^{\otimes (-m)}$ für $m < 0$. Wir identifizieren $\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n)$ mit $\mathcal{O}(m+n)$ über den Isomorphismus $E/H \otimes (E/H)^r = k$.

Bezeichnung:

Sei F ein \mathcal{X} -Modul. Für $F \otimes \mathcal{O}(m)$ schreiben wir $F(m)$. Dies liefert in offensichtlicher Weise einen Endofunktor $F \mapsto F(m)$ von $\text{Mod}^{\mathcal{X}}$ bzw. $\mathcal{V}_0^{\mathcal{X}}$.

1.2 Das üblicherweise durch Verkleben [Serre, FAC, III, 2, n° 54] definierte Hopfbündel \mathcal{X} stimmt mit dem eben erklärten $\mathcal{O}(-1)$ überein: Wir können auf jeder offenen Menge von $\mathbb{P}(E)$, wo eine Funktion $x \in E$ nicht verschwindet, eine funktorielle Familie von Isomorphismen in den Fasern angeben:

$\mathcal{O}(-1)(H) = (E/H)^{\times} \rightarrow k = \mathcal{X}(H), \lambda \mapsto \lambda(x \text{ mod } H)$.
Diese Familien können wir offenbar zu einer Familie über $P(E)$ so zusammenkleben, daß ein Isomorphismus $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{X}$ induziert wird.

1.3 Da $P(E)$ ein nichtsinguläres Schema ist, sind der Differentialmodul \mathcal{Q} und sein Duales, der Tangentialmodul, Vektorbündel [DG, I, 4.4.13]. Nach [Altmann-Kleiman, Intr. Groth. Dual. Th, p. 11, Th. 3.1] haben wir folgendes Resultat:

Lemma:

Es gibt eine kanonische exakte Sequenz

$0 \rightarrow \mathcal{Q}(1) \rightarrow \mathcal{O} \otimes E^{\times} \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0$ (\mathcal{X} der Kokern von 1.1). Wir identifizieren $\mathcal{Q}(1)$ daher mit dem tautologischen Vektorbündel (1.1).

Das Lemma läßt sich anders als in Altmann-Kleiman in der funktoriellen Sprache aufgrund der Definition von \mathcal{Q}^* direkt beweisen.

1.4 Wie auch diese Arbeit bestätigt, ist der Begriff des Schnittes in ein Vektorbündel ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Bündeln:

Definition:

Sei F ein \mathcal{X} -Modul $p: F \rightarrow \mathcal{X}$. Ein Schnitt von F ist ein \mathcal{X} -Morphismus $s: \mathcal{X} \rightarrow F$ mit $p \circ s = \text{id}_{\mathcal{X}}$. Mit $\Gamma(F)$ bezeichnen wir die Menge der Schnitte, die per faserweiser Addition bzw. Multiplikation ein k -Vektorraum ist. Γ ist ein additiver linksexakter Funktor $\text{Mod}^{\mathcal{X}} \rightarrow k\text{-Vektorräume}$, deren abgeleitete Funktoren H^i ($i \in \mathbb{N}$, $H^0 = \Gamma$) die Kohomologiefunktoren mit Werten in Modulgarben sind. (Die von Hom abgeleiteten werden mit Ext^i bezeichnet.)

Offenbar ist $\Gamma(\mathcal{O}) = k$ auf kanonische Weise und der Homomorphismus $E \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}(1))$, $e \mapsto (\mathcal{O}(E)) \xrightarrow{H} \mathcal{O}(1)$ ist injektiv, wodurch wir aus Lemma 1.3 schließen, daß $\Gamma(\mathcal{O}(1)) = 0$ ist. Da die Multiplikation mit einem Schnitt $e \in E$ von $\mathcal{O}(1)$ eine Injektion $F(-1) \rightarrow F$ induziert, ist auch $\Gamma(\mathcal{O}) = 0$. Das Tensorieren mit Vektorbündeln ist ein exakter Funktor. Wenn wir daher die Sequenz in 1.3 mit $\mathcal{O}(-1)$ tensorieren und Schnitte nehmen, erschließen wir sofort $\Gamma(\mathcal{O}(-1)) = 0$.

1.5 Mit den hier angedeuteten und den Techniken des Einschneidens eines $P(E)$ -Moduls auf einen Unterraum von $P(E)$ lassen sich folgende drei ersten klassischen Resultate beweisen, auf die wir immer wieder zurückgreifen [Serre, FAC]:

1. $\Gamma(\mathcal{O}(m)) = 0$ für $m < 0$ und $S^m(E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}(m))$, ist ein Isomorphismus für $m \geq 0$. $e_1, \dots, e_m \mapsto P(E) \rightarrow \mathcal{O}(m)$
 $H \mapsto (e_i \text{ mod } H) \otimes \dots$

Hierbei ist $S^m(E)$ die m -te Komponente der symmetrischen Algebra über E .

2. $H^1(\mathcal{O}(m)) = 0$ für $i > 0$ und $m \geq -n$ sowie für $i < n$ und $m < -n$.

3. Wenn F ein $P(E)$ -Modul ist, gilt $H^1(F) = 0$ für $i > n$ und für genügend großes m ist $F(m)$ global erzeugt und $H^1(F(m)) = 0$ für $i > 0$.

Hierbei nennen wir F global erzeugt, wenn $\mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow F$ surjektiv ist. $(H, s) \mapsto s(H)$

4. (Serre-Dualität) $H^1(F)^*$ ist kanonisch zu $\text{Ext}^{n-1}(F, \wedge^n \mathcal{O})$ isomorph.

1.6 Die kanonische mit $\mathcal{O}(-1)$ tensorierte Surjektion $\mathcal{O}(-1) \otimes E \rightarrow \mathcal{O}$ mit Kern \mathcal{O} von Lemma 1.3 läßt sich zu einer n -Erweiterung fortsetzen:

Lemma:

Sei F ein Bündel von Rang r und $F \xrightarrow{f} \mathcal{O}$ eine Surjektion. Dann ist die Sequenz $0 \rightarrow \wedge^r F \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^{k+1} F \rightarrow \wedge^k F \rightarrow \dots \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$ exakt, wobei f_k der faserweise durch

$f_k(e_0 \wedge \dots \wedge e_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i f_0(e_i) e_0 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_k$
definierte Homomorphismus ist.

Zum Beweis wenden wir Lemma 0.7 an, wählen eine Basis einer Faser von F und stellen die Exaktheit durch Berechnung von Bild und Kern fest.

Da wir $\Omega(1)$ als Unterbündel von $\mathcal{O} \otimes E$ bzw. \mathcal{Q} als solches von $\mathcal{O}(-1) \otimes E$ auffassen, ergeben sich auch Inklusionen für die höheren Differentialbündel:

$\Lambda^k(\Omega(1)) \subset \mathcal{O} \otimes \Lambda^k E$ und $\Lambda^k \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}(-k) \otimes \Lambda^k E$
 (vgl. 0.7) und wir können formulieren:

Folgerung:

1. die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{O}(-n-1) \otimes \Lambda^{n+1} E \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}(-k-1) \otimes \Lambda^{k+1} E \rightarrow \mathcal{O}(-k) \otimes \Lambda^k E \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes E \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$ ist exakt, wobei wir mit f_0 die mit $\mathcal{O}(-1)$ tensorierte kanonische Surjektion (1.3) bezeichnen und mit

f_k die durch
 $\lambda_0 \dots \lambda_k \otimes e_0 \wedge \dots \wedge e_k \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \lambda_1(\hat{e}_i) \lambda_0 \dots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \dots \lambda_k \otimes e_0 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_k$
definierten Abbildung. ($\hat{e}_i = e_i \pmod H$, $H =$ Punkt von $P(E)$)

2. Es gilt: $\text{Kern}(f_k) = \Lambda^{k+1} \mathcal{Q}$, und $0 \rightarrow \Lambda^{k+1} \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}(-k-1) \otimes \Lambda^{k+1} E \rightarrow \Lambda^k \mathcal{Q} \rightarrow 0$ ist exakt.
3. Insbesondere ist $\mathcal{O}(-n-1) \otimes \Lambda^{n+1} E \rightarrow \Lambda^n \mathcal{Q}$ ein kanonischer Isomorphismus.

Beweis:

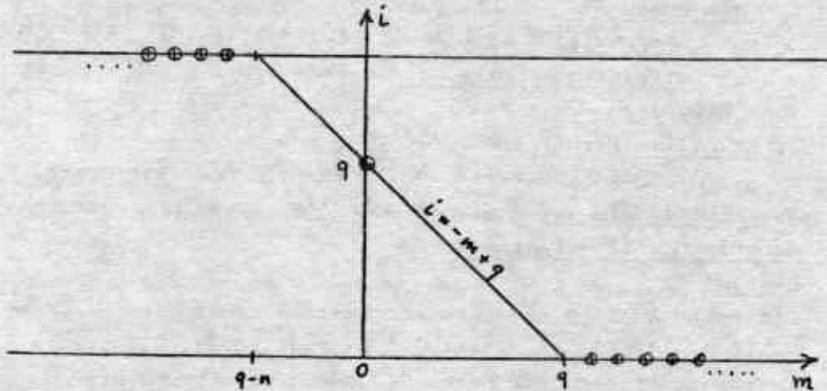
Die erste Aussage erhalten wir aus dem Lemma mit $\Lambda^k F = \Lambda^k(\mathcal{O}(-1) \otimes E) = \mathcal{O}(-k) \otimes \Lambda^k E$ (vgl. 0.7). Die zweite Aussage läßt sich mit Lemma 0.7 durch Berechnung des Kerns der Abbildung $\mathcal{O} \otimes \Lambda^{k+1} E \rightarrow \mathcal{O}(1) \otimes \Lambda^k E$ zeigen, die in der Faser über H durch $e_0 \wedge \dots \wedge e_k \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i (e_i \pmod H) \wedge e_0 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_k$ gegeben ist. Wählen wir eine mit H verträgliche Basis von E , sehen wir sofort, daß $\Lambda^{k+1}_H = (\Lambda^{k+1} \Omega(1))(H)$ der Kern ist. Da $\Lambda^{k+1} \Omega(1) = \Lambda^{k+1} \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}(k+1)$ ist (0.7), erhalten wir durch Tensorieren mit $\mathcal{O}(k+1)$ das Gewünschte. qed.

1.7 Mit Folgerung 1.6 lassen sich Verschwindungssätze für die Kohomologie der Differentialbündel mittels Induktion und 1.5.2 leicht beweisen. Wir geben hier das Resultat:

Lemma:

1. Sei $m > 0$. Für $i > 0$ gilt dann
 $H^i(\wedge^q \Omega \otimes \mathcal{O}(m)) = 0$ für $0 \leq q \leq n$ und außerdem bei $0 < m \leq q$: $H^1(\wedge^q \Omega \otimes \mathcal{O}(m)) = 0$.
2. Sei $m < 0$. Für $i < n$ gilt dann
 $H^i(\wedge^q \Omega \otimes \mathcal{O}(m)) = 0$ für $0 \leq q \leq n$ und außerdem bei $q - n \leq m < 0$ $H^n(\wedge^q \Omega \otimes \mathcal{O}(m)) = 0$.
3. Im Fall $m = 0$ gilt $H^i(\wedge^q \Omega) = 0$ für $i \neq q$ und
 $H^q(\wedge^q \Omega) = k$.

In folgender Zeichnung haben wir jeden Punkt (m, i) von \mathbb{Z}^2 eingekreist, für den evtl. $H^i(\wedge^q \Omega \otimes \mathcal{O}(m)) = 0$ ist. Für alle anderen gilt $H^i(\wedge^q \Omega \otimes \mathcal{O}(m)) \neq 0$.



2. Der Zusammenhang zwischen Vektorbündeln und Kroneckermoduln

Bisher haben wir die speziellen Bündel $\mathcal{O}(m)$ und $\wedge^k \Omega$ kennengelernt, daraus durch Tensorierung abgeleitet die $(\wedge^k \Omega)(m)$ (s. Bez. 1.1), wovon die äußeren Potenzen $\wedge^k(\Omega(1)) = (\wedge^k \Omega)(k)$ (s. 0.7) des tautologischen Bündels $\Omega(1)$ (1.1) eine herausragende Rolle spielen werden. Jetzt wollen wir mit Hilfe dieser Bündel beliebige Vektorbündel untersuchen, allgemeiner beliebige $\mathcal{P}(E)$ -Moduln.

2.1 In der Arbeit von Serre [FAC] wurde die Äquivalenz von $\text{Mod}^{\mathcal{P}(E)}$ mit einer Kategorie von "graduierten $S(E)$ -Moduln" gezeigt. Einem $\mathcal{P}(E)$ -Modul F wurde sein Schnittmodul zugeordnet.

Definition:

Wir bezeichnen mit $X(F)$ den graduierten $S(E)$ -Modul $\coprod_{m \in \mathbb{Z}} \Gamma(F(m))$ und nennen ihn Schnittmodul von F . Zur Definition der Skalarmultiplikation brauchen wir nur die Multiplikation mit Elementen von E auf einer homogenen Komponente $\Gamma(F(m))$ anzugeben. Dazu tensorieren wir $\mathcal{O} \otimes E \rightarrow \mathcal{O}(1)$ mit $F(m)$ und wenden Γ an. Die erhaltene Abbildung $E \otimes \Gamma(F(m)) \rightarrow \Gamma(F(m+1))$ definiert die Modulstruktur.

X ist ein Funktor von $\text{Mod}^{\mathcal{P}(E)}$ in die Kategorie der graduierten $S(E)$ -Moduln Grad^E (oder nur Grad).

2.2 Wir wollen untersuchen, wie weit schon die Abbildung $E \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \Gamma(F)$ den Schnittmodul von F und daher aufgrund der Serreschen Resultate schon F selbst bestimmt. Nach 1.5 leistet diese Abbildung für $\mathcal{O}(m)$ mit $m < 0$ nichts: Sie ist Null. Für $\mathcal{O}(m)$ mit $m \geq 0$ bestimmt sie jedoch $X(\mathcal{O}(m)) = \coprod_{m \in \mathbb{Z}} S^m(E)$ (mit der "richtigen" Graduierung). $F = \mathcal{O}(-1)$ kann man durch Tensorierung mit $\mathcal{O}(m)$ für genügend großes m zu einem "guten" $\mathcal{P}(E)$ -Modul $F(m)$ machen, und wie wir sehen werden, gilt dies generell. Daher die folgende Begriffsbildung:

Definition:

Die in 2.1 für jeden $P(E)$ -Modul definierte Abbildung $E \otimes \Gamma(P(-1)) \rightarrow \Gamma(F)$ heißt Kroneckermodul von F und wird mit $\mathcal{K}(F)$ bezeichnet. (Vgl. hierzu auch die Einleitung!)

Für $E = k^2$ wurde das Problem der Klassifizierung von linearen Abbildungen der Form $E \otimes V \rightarrow W$, wobei V und W endlich dimensionale Vektorräume sind, zuerst von KRONECKER untersucht. Wir definieren daher allgemeiner:

2.3 Definition:

Seien V und W endl. dim. Vektorräume. Eine lineare Abbildung $E \otimes V \rightarrow W$ heißt Kroneckermodul über E. Ein Morphismus zwischen Kroneckermoduln ist ein Paar von linearen Abbildungen $\varphi: V \rightarrow V'$ und $\psi: W \rightarrow W'$, das das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} E \otimes V & \rightarrow & W \\ \downarrow E \otimes \varphi & & \downarrow \psi \\ E \otimes V' & \rightarrow & W' \end{array}$$
 kommutativ macht.

Die Kroneckermoduln bilden also eine Kategorie Kron^E oder auch Kron , die die Kroneckermoduln von $P(E)$ -Moduln als volle Unterkategorie enthält. Wenn $f: F \rightarrow G$ ein Homomorphismus von $P(E)$ -Moduln ist, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \otimes \Gamma(F(-1)) & \rightarrow & \Gamma(F) \\ \downarrow E \otimes \Gamma(f(-1)) & & \downarrow \Gamma(f) \\ E \otimes \Gamma(G(-1)) & \rightarrow & \Gamma(G) \end{array}$$

kommutativ, so daß wir \mathcal{K} als Funktor von Mod^E nach Kron^E ansehen. (Mit Mod^E oder Mod bzw. \mathcal{V}^E oder \mathcal{V} bezeichnen wir abkürzend Mod^{nE} bzw. \mathcal{V}^{nE} .)

Wenn wir eine Basis von E wählen, so ist ein Kroneckermodul nichts weiter als $n+1 = \dim E$ lineare Abbildungen $V \rightarrow W$, und zwei Kroneckermoduln sind isomorph, wenn die einen $n+1$ linearen Abbildungen simultan zu den anderen $n+1$ äquivalent sind, d.h. bei Wahl von Basen von V und W , daß das eine $(n+1)$ -tupel von Matrizen durch zwei Elemente in $GL(V)$ und $GL(W)$ simultan zum anderen $(n+1)$ -tupel konjugiert ist.

Als Beispiel eines Kroneckermoduls haben wir für $m \geq 0$ $\mathcal{K}(\mathcal{O}(m)) : E \otimes S^{m-1}(E) \rightarrow S^m(E)$, durch die Multiplikation im Ring $S(E)$ induziert (vgl. 1.5.1). Insbesondere ist $E \otimes \mathcal{O} \rightarrow k$ der Kroneckermodul von \mathcal{O} und die "Identität" $E \otimes k \rightarrow E$ der von (1).

2.4 Umgekehrt können wir aus einem Kroneckermodul $E \otimes V \xrightarrow{\alpha} W$ einen $\mathcal{P}(E)$ -Modul $\mathcal{U}(\alpha)$ folgendermaßen konstruieren:

Definition:

Wir tensorieren die Inklusion $\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O} \otimes E$ mit V (vgl. 0.7) und definieren den aus α konstruierten $\mathcal{P}(E)$ -Modul $\mathcal{U}(\alpha)$ als den Kokern der zusammengesetzten Abbildung

$\mathcal{O}(1) \otimes V \subset \mathcal{O} \otimes E \otimes V \xrightarrow{\mathcal{O} \otimes \alpha} \mathcal{O} \otimes W$. Ein Morphismus von Kroneckermoduln induziert ein kommutatives Diagramm $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(1) \otimes V & \rightarrow & \mathcal{O} \otimes W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(1) \otimes V' & \rightarrow & \mathcal{O} \otimes W' \end{array}$ und also einen Morphismus der Kokerne. Dadurch wird \mathcal{U} zu einem Funktor $\text{Kron}^E \rightarrow \text{Mod}^E$

Wenn α der Kroneckermodul $E \otimes S^{m-1}(E) \rightarrow S^m(E)$ von $\mathcal{O}(m)$ ist, liefert die Konstruktion als Kokern von $\mathcal{O}(1) \otimes S^{m-1}(E) \rightarrow \mathcal{O} \otimes S^m(E)$ wieder $\mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{O}(m)$, denn die Sequenz der Fasern $H \otimes S^{m-1}(E) \rightarrow S^m(E) \rightarrow (E/H)^{\otimes m} \rightarrow 0$ über H ist exakt. Dies kann man z.B. zeigen, indem man die Exaktheit der kanonischen Sequenz $0 \rightarrow \wedge^1 H \otimes S^{m-n}(E) \rightarrow \wedge^{n-1} H \otimes S^{m-n+1}(E) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 H \otimes S^{m-2}(E) \rightarrow H \otimes S^{m-1}(E) \xrightarrow{\alpha'} S^m(E)$ nachweist und die Dimension des Kokerns von α' berechnet.

2.5 Für die Funktoren \mathcal{U} und \mathcal{K} findet man einen ersten Zusammenhang:

Satz:

\mathcal{U} ist linksadjungiert zu \mathcal{K} .

Beweis:

Wir konstruieren zueinander inverse funktorielle Abbildungen zwischen $\text{Hom}(\mathcal{U}(\mathcal{X}), F)$ und $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{K}(F))$, wobei F ein $\mathcal{P}(E)$ -Modul und $\mathcal{X} : E \otimes X_{-1} \rightarrow X_0$ ein Kroneckermodul ist.

1. Schritt: Zunächst definieren wir natürliche Homomorphismen $\psi(\alpha): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}\mathcal{M}(\alpha)$ und $\varphi(F): \mathcal{M}(\mathcal{X}(F)) \rightarrow F$ und erklären dann $\text{Hom}(\mathcal{M}(\alpha), F) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X}(F))$ durch $b \mapsto \mathcal{X}(b) \circ \psi(\alpha)$ und die umgekehrte Abbildung durch $c \mapsto \varphi(F) \circ \mathcal{M}(c)$.

Zur Definition von $\varphi(F)$ betrachten wir die nach Definition 2.4 exakte Sequenz $\Omega(1) \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{X}(F)) \rightarrow 0$. Da die Auswertung $\mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow F$ auf dem Bild von $\Omega(1) \otimes \Gamma(F(-1))$ offenbar verschwindet, faktorisiert sie als $\varphi(F)$ über $\mathcal{M}(\mathcal{X}(F))$.

Zur Definition von $\psi(\alpha)$ müssen wir nach 2.3 und 2.2 ein kommutatives Diagramm $E \otimes X_{-1} \rightarrow X_0$ konstruieren.

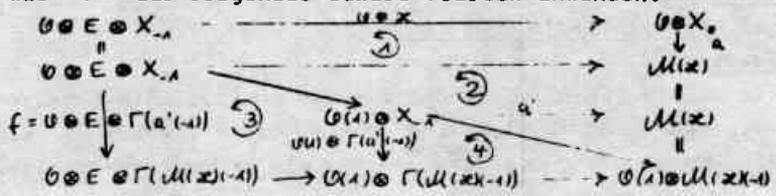
$$\begin{array}{ccc} E \otimes X_{-1} & \xrightarrow{\quad} & X_0 \\ \downarrow E \otimes \psi(\alpha) & & \downarrow \psi(\alpha) \\ E \otimes \Gamma(\mathcal{M}(\alpha)(-1)) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma(\mathcal{M}(\alpha)) \end{array}$$

Nach Definition 2.4 ist erstens $\Omega(1) \otimes X_{-1} \rightarrow \mathcal{O} \otimes X_0 \xrightarrow{a} \mathcal{M}(\alpha) \rightarrow 0$ exakt und $\psi(\alpha)_0$ sei $\Gamma(a)$. Zweitens ist auch $0 \rightarrow \Omega(1) \otimes X_{-1} \rightarrow \mathcal{O} \otimes E \otimes X_{-1} \rightarrow \mathcal{O}(1) \otimes X_{-1} \rightarrow 0$ exakt nach 1.3 und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega(1) \otimes X_{-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O} \otimes E \otimes X_{-1} \\ \parallel & & \downarrow \mathcal{O} \otimes \alpha \\ \Omega(1) \otimes X_{-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O} \otimes X_0 \end{array}$$

ist kommutativ, so daß $\mathcal{O} \otimes \alpha$ einen Homomorphismus der Kokern $\mathcal{O}(1) \otimes X_{-1} \xrightarrow{a'} \mathcal{M}(\alpha)$ induziert. Dann sei $\psi(\alpha)_{-1} = \Gamma(a'(-1))$.

Die Kommutativität des Diagramms * folgt, wenn wir Γ auf folgendes äußere Viereck anwenden:



Dabei ist das Teildiagramm 1 kommutativ aufgrund der Definition von $\mathcal{M}(\alpha)$, 2: nach Definition von a' , 3: Definition von Kokern f und 4 gilt allgemein: $(\mathcal{O} \otimes V \xrightarrow{a'(-1)} F(-1))$ (mit (1) tensorieren).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \otimes \Gamma(a'(-1)) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{\text{Kern}} \\ & & \mathcal{O} \otimes \Gamma(F(-1)) \end{array}$$

2. Schritt: Um zu zeigen, daß die Abbildungen $\text{Hom}(\mathcal{U}(\mathcal{X}), F) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X}(F))$ invers zueinander sind, genügt es, die Gleichungen $\varphi(\mathcal{U}(\mathcal{X})) \circ \mathcal{U}(\psi(\mathcal{X})) = \text{id}_{\mathcal{U}(\mathcal{X})}$ und $\mathcal{X}(\varphi(F)) \circ \psi(\mathcal{X}(F)) = \text{id}_{\mathcal{X}}$ nachzuweisen, wie man leicht sieht. Zum Beispiel folgt die erste Gleichung durch Auswertung des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{Q}(1) \otimes \mathcal{X}_{-1} & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes \mathcal{X}_0 & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{X}) \\
 \downarrow \mathcal{Q}(1) \otimes \psi(\mathcal{X}_{-1}) & & \downarrow \mathcal{O} \otimes \psi(\mathcal{X}_0) & \nearrow \mathcal{X} \circ \mathcal{U} & \uparrow \mathcal{U}(\psi(\mathcal{X})) \\
 \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(\mathcal{U}(\mathcal{X})(-1)) & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes \Gamma(\mathcal{U}(\mathcal{X})) & \longrightarrow & \mathcal{U}\mathcal{X}\mathcal{U}(\mathcal{X})
 \end{array}$$

Der gestrichelte Pfeil sei $\varphi(\mathcal{U}(\mathcal{X}))$. Die zweite Gleichung läßt sich ähnlich beweisen. ged.

2.6 Bemerkung:

Als allgemeine Phänomen bei adjungierten Funktoren stellen wir hier speziell heraus, daß auf der vollen Unterkategorie der $P(E)$ -Moduln F , für die $\varphi(F) = \text{id}$, d.h. die Sequenz $\mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow F \rightarrow 0$ exakt ist, eine volltreue Einbettung nach Kron^E liefert. da das Diagramm $\text{Hom}(\mathcal{U}(\mathcal{X}(F)), G) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}(\mathcal{X}(F), \mathcal{X}(G))$

$$\begin{array}{ccc}
 & \swarrow \varphi(\psi \circ \mu) & \nwarrow \mu \\
 & \text{Hom}(\mathcal{U}\mathcal{X}(F), \mathcal{U}\mathcal{X}(G)) & \\
 & \swarrow \mu & \nwarrow \mu
 \end{array}$$

kommutativ ist.

Wir wollen $P(E)$ -Moduln mit $\varphi(F) = \text{id}$ gut nennen und die entscheidende Frage stellen, "wie viele" $P(E)$ -Moduln gut sind. Die halbe Antwort ist die Idee, daß sich die exakte Sequenz $\mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow F \rightarrow 0$ für ein Vektorbündel zu einer n -Erweiterung fortsetzen lassen müsse.

Theorem:

Sei F ein global erzeugtes Vektorbündel über $P(E)$ mit $H^1(F(-m)) = 0$ für $1 > 0$ und $0 \leq m \leq n$. Dann ist die Sequenz $0 \rightarrow \wedge^n \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-n)) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^{k+1} \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-k-1)) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow F \rightarrow 0$ eine in F funktorielle Auflösung von F . Dabei ist f_{k+1} für $k > 0$ in der Faser über dem Punkt H von $P(E)$ definiert durch

$f_{k+1}(h_0 \wedge \dots \wedge h_k \otimes s) = \sum_{i=0}^k (-1)^i h_0 \wedge \dots \wedge \hat{h}_i \wedge \dots \wedge h_k \otimes h_i s$
 als Abbildung nach $\bigwedge^k \mathcal{O}(1) \otimes \Gamma(F(-k))$. Für die Bedeutung von $h_i s$ siehe 2.2.

Beweis:

Aus der Definition von f_k erkennt man sofort, daß die Sequenz wohldefiniert und ein Komplex ist. Daher brauchen wir nach Lemma 0.7 die Exaktheit der Sequenz nur für Erweiterungskörper K von k nachzuprüfen. Wegen der Verträglichkeit der globalen Schnitte mit Skalaerweiterungen und da nach [Groth., EG III, 7.7.5] das skalarerweiterte Bündel auf $P(E \otimes K)$ dieselben Kohomologieeigenschaften wie F hat, dürfen wir $K = k$ annehmen. Sei $H \in P(E)(k)$ und e_1, \dots, e_n eine Basis von H , die wir durch $e_0 \in E$ zu einer solchen von E ergänzen.

Beweisen wir jetzt die Exaktheit der Teilsequenz $0 \rightarrow \bigwedge^n H \otimes \Gamma(F(-n)) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \Gamma(F)$:
 Wenn $F = \mathcal{O}(m)$ ist mit $m \geq 0$, ist diese Sequenz nach Definition und 1.5.1 eine homogene Komponente des Koszulkomplexes für den Ring $S(E)$, den Schnitttring von \mathcal{O} , und die $S(E)$ -reguläre Sequenz (e_1, \dots, e_n) [Serre, Alg. loc., IV-3] [Altm. Kleim., Intr. Dual. Th., I, 4]. Der Koszulkomplex $0 \rightarrow \bigwedge_{S(E)}^n (H \otimes_{S(E)} S(E)) \rightarrow \bigwedge_{S(E)}^{n-1} (H \otimes_{S(E)} S(E)) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes_{S(E)} S(E) \rightarrow S(E)$ ist exakt und läßt sich offenbar schreiben als exakte Sequenz von graduierten $S(E)$ -Moduln der Form $0 \rightarrow \bigwedge^n H \otimes S(E)(-n) \rightarrow \bigwedge^{n-1} H \otimes S(E)(-n+1) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes S(E)(-1) \rightarrow S(E)(0)$. ($S(E)(m)$ ist der $S(E)$ -Modul $S(E)$ mit um m verschobener Graduiertung). Auf diese Sequenz wenden wir den klassischen exakten Funktor an, der endlich erzeugten graduierten $S(E)$ -Moduln $P(E)$ -Moduln zuordnet (Def. siehe Einleitung) und erhalten die exakte Sequenz $0 \rightarrow \bigwedge^n H \otimes \mathcal{O}(-n) \rightarrow \bigwedge^{n-1} H \otimes \mathcal{O}(-n+1) \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^2 H \otimes \mathcal{O}(-2) \rightarrow H \otimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O}$, wo ein durch h in $H \subset E$ induzierter Morphismus lokal durch die Multiplikation mit h gegeben ist [Serre, FAC, III, 2, n° 58].

* Wenn wir diese Sequenz mit dem lokalfreien Modul F tensorieren, bleibt sie exakt, und da F den vorausgesetzten Kohomologiebedingungen genügt, ist sie Γ -azyklisch, und daher ist auch die Sequenz der Schnitte

$$0 \rightarrow \wedge^n H \otimes \Gamma(F(-n)) \rightarrow \wedge^{n-1} H \otimes \Gamma(F(-n+1)) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \Gamma(F)$$

exakt. Der durch h induzierte Homomorphismus $\Gamma(F(-k-1)) \rightarrow \Gamma(F(-k))$ ist der entsprechend Def. 2.2 gegebene, da das lokal richtig ist. Somit ist die Sequenz bis zur Stelle $\Omega(1) \otimes \Gamma(F(-1))$ exakt.

Zeigen wir nun die Exaktheit an der Stelle

$0 \otimes \Gamma(F)$: Wegen der globalen Erzeugtheit von F ist sie die einzige Stelle, an der wir noch Exaktheit nachweisen müssen, und daher genügt es zu zeigen, daß die alternierende Summe der Dimensionen der $\wedge^k H \otimes \Gamma(F(-k))$ gleich dem Rang des Bündels ist.

Lemma:

Sei F ein $\mathcal{P}(E)$ -Modul und [Serre, FAC, III, 6]. Dann ist $(-1)^n \text{Rang } F$.

$\chi(F)$ sein Hilbertpolynom

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \chi(F)(m) =$$

Beweis:

Da $\chi(F)$ ein Polynom von der Form $\chi(F)(m) = \frac{\text{Rang } F}{n!} m^n + (\text{Polynom von Grad } < n)$ in m ist [Mumf., Ab. Var., II, 6 App.] und da der Operator $\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m}$ linear ist, genügt es zu zeigen, daß $\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} m^k = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < k < n \\ (-1)^n n! & \text{für } k = n \end{cases}$ ist.

Beweisen wir diese induktiv nach n . Für $n = 0$ stimmt die Aussage. Es gilt: $\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+1}{m} m^k = - \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} m^k + \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} m^{k-1}$
 $= -(n+1) \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} m^{k-1} = -(n+1) \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} (m^{k-1} + P(m))$
 wobei P ein Polynom vom Grad $< k-1 \leq n$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Summe daher 0 für $k \leq n$ und gleich $-(n+1)(-1)^n n!$ für $k = n+1$, wie verlangt.

qed Lemma

Da die mit $\mathcal{O}(-m)$ tensorierte Auflösung von F durch die F_i für $0 \leq m \leq n$ Γ -azyklisch ist, sind auch die Zeilen dieses Diagramms exakt. Dann ist es aber auch die rechte Spalte. Damit ist 1. bewiesen und also die F ein guter $\mathcal{P}(E)$ -Modul (2,6). Nach der Bemerkung 2.6 folgt die zweite Aussage. ged.

2.8 Wir stellen erste Eigenschaften der Kategorien \mathcal{N}_0 und \mathcal{M}_0 zusammen:

Lemma:

1. Für jedes $F \in \mathcal{M}_0$ ist $F(m) \in \mathcal{M}_0$ für alle genügend großen $m \in \mathbb{N}$.
2. Wenn der universelle Komplex von $F \in \mathcal{M}_0$ exakt, insbes. wenn $F \in \mathcal{M}_0$ ist, gilt $H^1(F(-m)) = 0$ für $1 > 0$ und $0 \leq m \leq n$ und F ist global erzeugt. (Insbesondere ist \mathcal{K} ein exakter Funktor auf \mathcal{M}_0 und $\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0$)
3. \mathcal{N}_0 ist gegen Erweiterungen abgeschlossen, der Kokern einer faserweisen Injektion in \mathcal{N}_0 existiert in \mathcal{N}_0 , Kokerne von Injektionen $F' \rightarrow F$ in \mathcal{M}_0 existieren in \mathcal{M}_0 , wenn F' ein Bündel ist, aber i.a. existieren keine Kerne: $\mathcal{O}(1) \notin \mathcal{M}_0$.

Beweis:

Nach Hilberts Syzigiensatz [McLane, Homology, III, 6.4] besitzt jeder $\mathcal{P}(E)$ -Modul F eine endliche Auflösung durch Vektorbündel. Wenn wir sie mit $\mathcal{O}(m)$ tensorieren mit genügend großem m , so erkennen wir nach Definition von \mathcal{M}_0 und 1.5.3 die Richtigkeit von 1.. Aussage 2. folgt aus 1.7, wenn wir $\wedge^q(\mathcal{O}(1)) = \wedge^q \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}(q)$ beachten, und der folgenden Aussage:

Sei $0 \rightarrow F_q \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{P}(E)$ -Moduln mit $H^1(F_j) = 0$ für $1 \geq j > 0$. Dann ist $H^1(F_0) = 0$ für $1 > 0$.

Die Exaktheit von \mathcal{K} folgt unmittelbar aus der von Γ , die wegen der verschwindenden Kohomologie richtig ist. Der Beweis von 3. geschieht durch direkte An-

wendung der Definitionen. Beachte, daß $H^1(\mathcal{O}(1)(-1)) \neq 0$ ist nach 1.7. qed.

2.9 Folgerung 2.7.2 besagt, daß die Kroneckermoduln $E \otimes \mathcal{O} \rightarrow k$ und $E \otimes k = E$ die Bündel \mathcal{O} und $\mathcal{O}(1)$ bestimmen (vgl. 2.3 Schluß). Allgemein gilt:

Lemma:

1. Der Kroneckermodul $\mathcal{K}(F)$ eines $\mathcal{P}(E)$ -Moduls F ist genau dann surjektiv, wenn F nicht \mathcal{O} als direkten Summanden hat. Die Dimension des Kokerns von $\mathcal{K}(F)$ ist der Rang des maximalen trivialen Summanden.

2. Der Kroneckermodul eines $\mathcal{P}(E)$ -Moduls F ist genau dann injektiv, wenn $F = \mathcal{O}^p \oplus \mathcal{O}(1)^q$ ist für geeignetes p und q .

Beweis:

Es ist klar, daß ein nicht surjektiver Kroneckermodul $E \otimes \mathcal{O} \rightarrow k$ als direkten Summanden abspaltet. Wenden wir \mathcal{M} auf diese Zerlegung an, erhalten wir \mathcal{O} als Summanden. Das Umgekehrte ist klar. Wenn $\mathcal{K}(F)$ injektiv ist, so offenbar isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von $E \otimes k = E$ und $E \otimes \mathcal{O} \rightarrow k$. qed.

Als ein Beispiel berechnen wir den Kroneckermodul des Tangentialbündels: Nach Lemma 1.3 haben wir die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes E \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$, die duale Sequenz ist $0 \xrightarrow{c} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1) \otimes E^* \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$, d.h. $\mathcal{K}(\mathcal{O}^*)$ ist der Kokern von $\mathcal{K}(c)$:

$$E \otimes \mathcal{O} \rightarrow E \otimes E^*$$

$\downarrow \qquad \quad \downarrow$
 $k \rightarrow E \otimes E^*$

Daher ist $\mathcal{K}(\mathcal{O}^*)$ die Projektion $E \otimes E^* \rightarrow E \otimes E^*/k$, wobei $k \rightarrow E \otimes E^* = \text{End}(E)$ die kanonische Abbildung ist.

3. Beziehungen zu klassischen Resultaten

Wir können den Rang des trivialen Anteils eines $P(E)$ -Moduls nach Lemma 2.9 als Dimension des Kokern seines Kroneckermoduls wiederfinden. Er läßt sich aber auch kohomologisch charakterisieren. Dazu die folgende Aussage:

Sei $k \in \mathbb{N}$ und die exakte Sequenz $0 \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow F \rightarrow 0$ mit den Eigenschaften $H^{k+1}(G_j) = 0$ und $H^{k-1}(G_j) = 0$ für $1 > 0$ und alle j gegeben. Dann sind die Homologiegruppen des Komplexes $0 \rightarrow H^k(G_n) \rightarrow H^k(G_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow H^k(G_0) \rightarrow 0$ genau die $H^{k-1}(F)$ und $H^{k+1}(F) = 0$ für $1 > 0$.

Sie läßt sich mit der üblichen Technik der Aufspaltung in kurze exakte Sequenzen und Betrachtung der langen Kohomologiesequenzen beweisen.

Wenden wir diese Aussage auf die mit $\mathcal{O}(-m)$ tensorierte universelle Auflösung eines Moduls in Mod_0 an, so ergibt sich:

Lemma:

Sei F ein $P(E)$ -Modul in Mod_0 und $m \geq n$. Die i -te Kohomologie von $F(-m)$ ist zur $(n-1)$ -ten Homologie des Komplexes $\mathcal{L}(F(-m))$ mit $\mathcal{L}(F(-m))_{n-j} = H^n(\wedge^j \mathcal{Q}(-m+j)) \otimes X_j$ isomorph, den man nach Anwendung von H^n auf die mit $\mathcal{O}(-m)$ tensorierte universelle Auflösung erhält. (Dabei ist $X_j = \Gamma(F(-j))$)

Folgerung:

Für $F \in \text{Mod}_0$ ist der maximale triviale Summand von F zu $\mathcal{O} \otimes H^n(F(-n-1))$ isomorph.

Beweis:

Betrachten wir $(F(-n-1))_{n-1} \xrightarrow{f} \mathcal{L}(F(-n-1))_n = H^n(\mathcal{Q}(-n)) \otimes \Gamma(F(-1)) \xrightarrow{g} H^n(\mathcal{O}(-n-1)) \otimes \Gamma(F)$. Aufgrund der Serre-Dualität (1.5.4) und $\wedge^n \mathcal{Q} = \mathcal{O}(-n-1)$ haben wir

$H^n(\mathcal{O}(-n)) = \text{Ext}^n(\mathcal{O}^*(-1), \wedge^n \mathcal{O}) = \Gamma(\mathcal{O}^*(-1))^*$. In 2.9 haben wir $\chi(\mathcal{O}^*)$ berechnet und gesehen, daß $\Gamma(\mathcal{O}^*(-1))^* = (E^*)^* = E$ ist. Da wiederum aufgrund der Serre-Dualität $H^n(\mathcal{O}(-n-1)) = \Gamma(\mathcal{O})^* = k$ ist in kanonischer Weise, ist die Abbildung φ_n in natürlicher Art der Kroneckermodul von F , dessen Kokern nach 2.9 als Dimension den Rang des maximalen trivialen Summanden von F hat. Andererseits ist er nach obigem Lemma isomorph zu $H^n(F(-n-1)) \otimes \mathcal{O}$. qed.

Hieraus läßt sich schon die Kennzeichnung der Vektorbündel auf der projektiven Geraden ableiten:

Satz:

Jedes Vektorbündel auf \mathbb{P}_1 ist direkte Summe von Geradenbündeln.

Beweis:

Wir dürfen nach 1.5 annehmen, daß $F \in \mathcal{N}_0$ ist. Aufgrund obiger Folgerung ist $F = F' \oplus \mathcal{O} \oplus H^1(F(-2))$, also $H^1(F'(-n-1)) = 0$. Daher ist $F'(-1) \in \mathcal{N}_0$ und $F'(-1) = F'' \oplus \mathcal{O} \oplus H^1(F'(-1)(-2))$. Wir schließen wie eben und so weiter bis wir auf ein Bündel F^0 stoßen mit $H^1(F^0(m)) = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Mit der Serre-Dualität (1.5.4) folgt $\Gamma(F^0(m)) = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, was nach 1.5.3 nur für $F^0 = 0$ möglich ist. qed.

3.2. Die Existenz der universellen Auflösung für beliebige $P(E)$ -Moduln läßt sich insbesondere auf $i_* F$ anwenden, wo F ein \mathcal{X} -Modul ist und $i: \mathcal{X} \subset P(E)$ die Einbettung eines nichtsingulären projektiven Schemas in einen projektiven Raum. Wenn man bedenkt, wie entscheidend die Möglichkeit einer Auflösung aus Vektorbündeln, z.B. durch den Hilbertschen Syzigiensatz, zur Formulierung und zum Beweis des Riemann-Rochschen Satzes verwendet wird [Borel-Serre, S. 105], ist es nicht verwunderlich, daß die universelle Auflösung Konsequenzen vom Typ "Riemann-Roch" hat.

Satz:

Sei $i: X \subset P(E)$ die Einbettung eines nichtsingulären projektiven Schemas in $P(E)$.

Der Satz von Riemann-Roch in der Form Hirzebruchs [Hirz., Top.Meth. IV, 21] [Borel-Serre, Bull.Soc.math., S. 113] ist gültig auf X , wenn der Satz von Riemann-Roch in der Form Grothendiecks [Borel-Serre, ebenda] für \mathcal{O}_X als Element des Grothendieck-Ringes $K(X)$ gilt: $(*) i_* T(X) =$

$$ch(i_! \mathcal{O}_X) \cdot T(P(E)).$$

(T = Toddpolynom, ch = Cherncharakter)

Beweis:

Allgemeine Überlegungen zeigen, daß es zum Beweis des Riemann-Roch-Hirzebruch für X genügt, ihn für $P(E)$ zu zeigen, was einfach ist, und ihn in der Form Grothendiecks für i und ein beliebiges Vektorbündel F auf X zu beweisen [Borel-Serre, n°7, S.115 und prop.10, S.118]:

(RR) $i_* (ch(F) \cdot T(X)) = ch(i_! F) \cdot T(P(E))$. Wir fassen alle Vektorbündel als Elemente des Grothendieckringes auf, verwenden aber dasselbe Zeichen F .

1. Schritt: Wenn (RR) für ein $F(m)$ gültig ist für $m \geq 0$, dann auch für F :

Es gilt: $i_* (ch(F(m)) \cdot T(X)) = ch(i_! F(m)) \cdot T(P(E))$ und außerdem $ch(F(m)) = ch(F \cdot i^! \mathcal{O}(m)) = ch(F) \cdot ch(i^! \mathcal{O}(m))$ [Borel-Serre, n°6]. Wegen der Axiome für Chernklassen (Funktorialität, Normalisierung) [Groth., Bull. Soc.math., S. 144] und da die induzierte Abbildung i^* der Chowringe Homomorphismus ist, gilt $ch(i^! \mathcal{O}(m)) = i^* ch(\mathcal{O}(m))$. Aufgrund der Formel $i_*(a \cdot i^*(b)) = (i_* a) \cdot b$ im Chowring [Chevalley, Ann. Chow, 3.-17] erhalten wir die Gleichung

$$ch(\mathcal{O}(m)) \cdot i_* ch(F) \cdot T(X) = ch(\mathcal{O}(m)) \cdot ch(i_! F) \cdot T(P(E))$$

Da nach Definition $ch(\mathcal{O}(m)) = 1 + (\text{Summanden vom Grad } > 0)$ ist, schließen wir auf die Gültigkeit von (RR) für F .

2. Schritt: Anwendung des Theorems 1.5 auf $i_* F$.

Aufgrund des ersten Schrittes und der Tatsache, daß i ein affiner Morphismus ist, so daß die Kohomologie von F auf \mathcal{X} und $i_* F$ auf $\mathbb{P}(E)$ dieselbe ist, dürfen wir mit Hilfe von 1.5.3 und Hilberts Syzygiensatz [Eilenberg, Cartan, VIII, Th6.5] annehmen, daß $i_* F$ in Mod_0^E ist. Nach Theorem 1.5 ist $i_* F (= i_* F)$ im Grothendieckring von $\mathbb{P}(E)$ (Borel-Serre, n°5d) Summe von ganzzahligen Vielfachen γ_p der $\wedge^p \Omega(1)$. Andererseits ist für Vektorbündel F auf \mathcal{X} $i^! F = F$ im Grothendieckring von \mathcal{X} , da die Formel $i^* i_* F = F$ richtig ist. (Zur Definition von $i^!$ siehe [Borel-Serre, n°5c]), es gilt $i^! = i^*$ bei Vektorbündeln). Daher ist F in $K(\mathcal{X})$ ganzzahlige Summe der $i^!(\wedge^p \Omega(1))$ mit denselben Vielfachen γ_p . Aufgrund der Additivität der (RR)-Formel [Chevalley, Ann. Chow, 3-15], genügt es daher, (RR) für $F = i^!(\wedge^p \Omega(1))$ zu beweisen.

Nach Folgerung I, 2.7 sind die $\wedge^p \Omega(1)$ aber ganzzahlige Linearkombinationen der $\mathcal{O}(m)$ für $m \leq 0$, so daß mit derselben Begründung wie eben nur (RR) für $F = i^! \mathcal{O}(m)$ zu beweisen ist für $m \leq 0$. Nach dem 1. Schritt folgt das aber, wenn (RR) für $F = i^! \mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ gültig ist.

Bemerkung: 1. Der Autor hat sich keine Gedanken darüber gemacht, wie schwer der Beweis der Formel (*) in obiger Folgerung ist.

2. Da die Existenz der universellen Auflösung von $i_* F$ auch für singuläre Schemata gilt, ist Theorem 1.5 möglicherweise ein Ansatzpunkt zur Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes und der damit zusammenhängenden Begriffe.

3. Bei geeigneter Definition von Mod_0^E läßt sich die universelle Auflösung auch definieren, wenn der Grundring beliebig ist. Dies wäre ein Ansatz zum Beweis des Riemann-Roch-Grothendieck.

3.3 Wir machen folgende Beobachtung: Wenn F ein \mathcal{X} -Modul auf einem nichtsingulären projektiven Schema der Dimension n ist und $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ das Differentialbündel auf \mathcal{X} , dann ist die Serre-Dualität zwischen $\Gamma(F)$ und $\text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ ein kanonischer Homomorphismus $\Gamma(F) \otimes \text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow k$, der einen Isomorphismus in $\text{Hom}(\text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}}), \Gamma(F)^*)$ induziert, so daß wir folgende Kette natürlicher Isomorphismen erhalten:
 $\text{End}(\Gamma(F)) = \Gamma(F)^* \otimes \Gamma(F) = \text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes \Gamma(F) = \text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \Gamma(F))$. Daher entspricht der Identität in $\text{End}(\Gamma(F))$ eine kanonische Klasse von Erweiterungen in $\text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \Gamma(F))$, die für $\mathcal{X} = P(E)$ sogar einen kanonischen Repräsentanten besitzt, wenn $F(n)$ in Mod_0 liegt: Die universelle Auflösung von $F(n)$. Mit deren Hilfe läßt sich die Serre-Dualität als Isomorphismus $\Gamma(F)^* \rightarrow \text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ direkt angeben:

Satz:

Sei F ein $P(E)$ -Modul und $F(n)$ in Mod_0 . Durch Tensorieren der universellen Erweiterung für $F(n)$ mit $\mathcal{O}(-n)$ erhalten wir eine Erweiterung von der Form

$$0 \rightarrow \wedge^n \mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^k \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}(k-n) \otimes \Gamma(F(n-k)) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes \Gamma(F(n)) \rightarrow F \rightarrow 0$$

Das Bilden der Fasersumme $\lambda_* E$ mit einem durch $\lambda \in \Gamma(F)^*$ induzierten Homomorphismus $\wedge^n \mathcal{O} \otimes \Gamma(F) \rightarrow \wedge^n \mathcal{O}$ definiert einen Isomorphismus $\Gamma(F)^* \rightarrow \text{Ext}^n(F, \wedge^n \mathcal{O})$
 $\lambda \mapsto \text{Klasse von } \lambda_* E$

Dies ist ein Spezialfall folgenden Lemmas:

Lemma:

Sei $\mathcal{E} = 0 \rightarrow F_{n+1} \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow 0$ eine Erweiterung von $P(E)$ -Moduln und G ein $P(E)$ -Modul, so daß $\text{Ext}^{n-k}(F_k, G)$ und $\text{Ext}^{n-k+1}(F_k, G)$ Null sind für $k > 0$.

Dann induziert die Fasersummenbildung $\text{Hom}(F_{n+1}, G) \rightarrow \text{Ext}^n(F_0, G)$ einen Isomorphismus.
 $\varphi \mapsto \text{Klasse von } \varphi_* \mathcal{E}$

Beweis:

Wir spalten E in kurze exakte Sequenzen $0 \rightarrow G_1 \rightarrow F_1 \rightarrow G_{1-1} \rightarrow 0$ auf und betrachten die folgenden Stücke der zugehörigen exakten Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ext}^{n-1}(F_1, G) & \rightarrow & \text{Ext}^{n-1}(G_1, G) & \rightarrow & \text{Ext}^n(F_0, G) & \rightarrow & \text{Ext}^n(F_1, G) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Ext}^{n-k}(F_k, G) & \rightarrow & \text{Ext}^{n-k}(G_k, G) & \rightarrow & \text{Ext}^{n-k+1}(G_{k-1}, G) & \rightarrow & \text{Ext}^{n-k+1}(F_k, G) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Hom}(F_n, G) & \rightarrow & \text{Hom}(F_{n+1}, G) & \rightarrow & \text{Ext}^1(G_{n-1}, G) & \rightarrow & \text{Ext}^1(F_n, G) \end{array}$$

Nach Voraussetzung sind die mittleren Pfeile alle bijektiv und nach Definition der Verbindungshomomorphismen ist ihre Zusammensetzung genau die angegebene Abbildung. qed Lemma

Zum Beweis des Satzes benötigen wir also Kenntnis über Erweiterungsgruppen der Differentialbündel. Diese können wir mit Hilfe von Folgerung 1.6 und Lemma 1.7 leicht beschaffen:

Das Ergebnis ist:

Lemma:

Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq p, q \leq n$. $\text{Ext}^1(\wedge^p \Omega, \wedge^q \Omega \otimes \mathcal{O}(m)) = 0$,
wenn 1. $i > 0$ und $i > q - p - m$
oder 2. $(i > q$ oder $i < q - p)$ und $i = q - p - m$
oder 3. $(i < q$ oder $i > n + q - p)$ und $i = q - p - m - 1$
oder 4. $i < n$ und $i < q - p - m - 1$ ist.

Wir überlassen dem Leser die Zusammensetzung des Beweises. Den Dualitätsansatz in obiger kanonischer Form für $F = \mathcal{O}(m)$ wenden wir im Anhang zur Klassifikation der Endomorphismen von projektiven Räumen an.

3.4. Der Funktor $F \mapsto F(m)$ von 1.1 in Mod^E hat seine Entsprechung auf der Seite der gradulierten Moduln in Grad^E , nämlich die Verschiebung der Gradulierung (m) und m Komponenten nach links oder rechts. Es gilt dann $X(F(m)) = X(F)(m)$, wenn X der Schnittfunktor ist. Wenn $E \otimes X_{-1} \rightarrow X_0$ der Kroneckermodul eines $\mathcal{P}(E)$ -Moduls F in Mod_0 ist, läßt sich $\mathcal{X}(F(1))$ direkt aus $\mathcal{X}(F)$ berechnen.

Wir nennen das Ergebnis $\mathcal{X}(F)(1)$ und können auch die Verschiebung in Gegenrichtung auf Kron^E definieren sowie den "Schnittmodul" eines Kroneckermoduls.

Definition:

Sei $\mathcal{X}: E \otimes X_{-1} \rightarrow X_0$ ein Kroneckermodul.

1. Wir definieren $\mathcal{X}(1): E \otimes X_0 \rightarrow E \otimes X_0 / \wedge^2 E \otimes X_{-1}$ als die natürliche Projektion, wobei wir durch das Bild von

$$\begin{aligned} \wedge^2 E \otimes X_{-1} &\rightarrow E \otimes X_0 && \text{dividieren.} \\ e \wedge e' \otimes x &\mapsto e \otimes e'x - e' \otimes ex && (ex = \mathcal{X}(e \otimes x)) \end{aligned}$$

2. Wir definieren $\mathcal{X}(-1): E \otimes X_{-2} \rightarrow X_{-1}$, wenn X_{-2} der Kern der natürlichen Abbildung $E^* \otimes X_{-1} \rightarrow \wedge^2 E^* \otimes X_0$ ist, durch die Zusammensetzung

$$E \otimes X_{-2} \rightarrow E \otimes E^* \otimes X_{-1} \rightarrow X_{-1}.$$

(X_{-2} ist unabhängig von der Basis e_1)

3. Der zu \mathcal{X} assoziierte Modul $X(\mathcal{X}) \in \text{Grad}^E$ sei rekursiv definiert durch $X(\mathcal{X})_{-1} = X_{-1}$, $X(\mathcal{X})_0 = X_0$ und $X(\mathcal{X})_m = E \otimes X(\mathcal{X})_{m-1} / \wedge^2 E \otimes X(\mathcal{X})_{m-2}$ wie unter 1. für $m > 0$, sowie $X(\mathcal{X})_m$ gleich dem Kern der natürlichen Abbildung $E^* \otimes X(\mathcal{X})_{m+1} \rightarrow \wedge^2 E^* \otimes X(\mathcal{X})_{m+2}$ für $m < 0$. Die natürlichen Abbildungen $E \otimes X(\mathcal{X})_m \rightarrow X(\mathcal{X})_{m+1}$ definieren die $S(E)$ -Modulstruktur.

Die Zuordnungen $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}(1)$, $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}(-1)$ und $\mathcal{X} \mapsto X(\mathcal{X})$ sind auf offensichtliche Weise Funktoren. Die m -malige Anwendung von (1) wird mit (m) bzw. $(-m)$ bezeichnet.

Lemma:

1. Wenn F in Mod liegt, dann auch $F(m)$ für $m \geq 0$.
2. Es gilt $\mathcal{X}(F(1)) = \mathcal{X}(F)(1)$ und für $n > 1$ $\mathcal{X}(F(-1)) = \mathcal{X}(F)(-1)$ für $F \in \text{Mod}$.

Beweis:

1.: Sei F zunächst in $\mathcal{V}b_0$ und tensoriere die universelle Auflösung mit $\mathcal{Q}(m)$. Da $F(m)$ global erzeugt ist und nach Lemma 1.7 die $\mathcal{V}b_0$ definierenden Kohomologiebedingungen erfüllt sind, ist auch $F(m)$ in $\mathcal{V}b_0$. Sei nun F in Mod .

mit einer Auflösung durch Vektorbündel $F_1 \in \mathcal{M}_0$. Da die $F_1(m)$ in \mathcal{M}_0 sind und $F(m)$ auflösen, ist F nach Definition in Mod_0 .

2.: Tensoriere die universelle Auflösung von F mit $\mathcal{O}(1)$.

Nach 1.7 ist diese Sequenz Γ -azyklisch und daher ist das Endstück $\Gamma(\mathcal{Q}(2)) \otimes \Gamma(F(-1)) \xrightarrow{\iota} \Gamma(\mathcal{Q}(1)) \otimes \Gamma(F)$

$\xrightarrow{\mathcal{X}(F(1))} \Gamma(F(1)) \rightarrow 0$ exakt. Da $\Gamma(\mathcal{Q}(2))$ nach Folgerung 1.6 kanonisch zum Bild von $\wedge^2 E \rightarrow E \otimes E$ isomorph und

$\Gamma(\mathcal{O}(1)) = E$ ist, ist $\Gamma(F(1))$ tatsächlich die Kokernabbildung von ι , also nach Definition $\mathcal{X}(1) = \mathcal{X}(F)(1)$.

Dasselbe Argument mit dem Endstück der universellen Auflösung von $F(n-2)$ führt zum Beweis der zweiten Gleichung: Tensoriere die exakte Sequenz $0 \rightarrow \wedge^n \mathcal{Q}(1)$

$\otimes \Gamma(F(-2)) \rightarrow \wedge^n \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \wedge^{n-2} \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F)$

mit $(\wedge^n \mathcal{Q}(1))^*$, dann ergibt sich aufgrund der Dualität in der äußeren Algebra die Exaktheit von $0 \rightarrow \Gamma(F(-2))$

$\rightarrow (\mathcal{Q}(1))^* \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow (\wedge^2 \mathcal{Q}(1))^* \otimes \Gamma(F)$.

Wenn wir die globalen Schnitte nehmen, erhalten wir nach

1.6, daß $\Gamma(F(-2))$ der Kern der kanonischen Abbildung

$E^* \otimes \Gamma(F(-1)) \rightarrow \wedge^2 E \otimes \Gamma(F)$ ist.

ged.

In 3.4.3 haben wir durch $X(\mathcal{X}(F))$ wie im klassischen Fall (siehe Einleitung) einem $P(E)$ -Modul einen graduierten Modul zugeordnet. Im Unterschied zum klassischen Fall beschränken wird die Bildkategorie nicht, erhalten dafür aber nur eine volltreue Einbettung nach Einschränkung auf Mod_0 . Nach dem Lemma stimmt die Modulstruktur von $X(F)$ (2.1) mit der von $X(\mathcal{X}(F))$ in den Komponenten vom Grad $\geq -n$ überein. Daher:

Folgerung:

Der volltreue Funktor $X \circ \mathcal{X}$ und der Funktor $X: \text{Mod}^E \rightarrow \text{Grad}^E$ induzieren dieselben Funktoren von Mod_0^E in die Kategorie Grad^E der graduierten $S(E)$ -Moduln mit Komponenten nur hohen Grades als wesentlich" [Serre, FAC, n°56f.] [Mumford, LCOAS, Lect. 7, p. 48]

Wir setzen aus technischen Gründen von hier ab k als -
algebraisch abgeschlossen voraus.

3.5 In diesem Abschnitt kommen Beziehungen zu Hilberts Syziensatz besonders in der Beweistechnik zum Ausdruck. Mit der (e_1, \dots, e_n) -Regularität (vgl. [Altman, Kleiman, Intr. Dual. Th., III, Def. 3.1]) besteht eine enge Verwandtschaft zu den folgenden Begriffsbildungen. Sie haben das Ziel, die Objekte von Kron_0 , die Kroneckermodul eines Vektorbündels sind, rein algebraisch zu charakterisieren.

Dazu definieren wir erst die Einschränkung eines Kroneckermoduls, die der Einschränkung eines Vektorbündels ($\mathcal{P}(E)$ -Moduls) auf einen Unterraum entspricht. Da wir mit dem Raum der Hyperebenen arbeiten, wird ein Unterraum von $\mathcal{P}(E)$ mit $E_0 \subset E$ durch $\mathcal{P}(E/E_0) = \{H \mid H \supset E_0\}$ gegeben.

Definition:

1. Sei $\alpha: E \otimes X_{-1} \rightarrow X_0$ ein Kroneckermodul über E . Der Kroneckermodul $\alpha|_{E/E_0}: E/E_0 \otimes X_{-1} \rightarrow X_0/E_0 X_{-1}$ über E/E_0 heißt Einschränkung von auf E/E_0 . Dabei ist X_{-2} die (-2) -te Komponente des assoziierten graduierten Moduls $X(\alpha)$ von α (Def. 3.4.3) und mit $E_0 X_{-2}$ (bzw. $E_0 X_{-1}$) bezeichnen wir das Bild von $E_0 \otimes X_{-2}$ (bzw. $E_0 \otimes X_{-1}$) in X_{-1} (bzw. X_0).
2. Den graduierten $S(E/E_0)$ -Modul $M|_{E/E_0}$ mit den homogenen Komponenten $(M|_{E/E_0})_m = M_m/E_0 M_{m-1}$ und der induzierten Struktur nennen wir Einschränkung von M auf E/E_0 .
3. Ein graduirter $S(E)$ -Modul M heißt regulär, wenn für jedes $p \in \{1, \dots, n\}$ und jeden Unterraum H von E der Kodimension $> p$ der $S(E/H)$ -Modul $M|_{E/H}$ keine Torsionselemente bezüglich der Multiplikation mit Elementen in E/H in den Komponenten vom Grad q mit $-p \leq q < 0$ hat und wenn $M_k = E \otimes M_{k-1} / \bigwedge^2 E \otimes M_{k-2}$ ist für $k > 0$.

4. Ein Kroneckermodul \mathcal{X} heißt regulär, wenn $X(\mathcal{X})$ es ist.
(Def. 3.4.3)

Theorem:

Ein Kroneckermodul \mathcal{X} ist genau dann von der Form $\mathcal{X} = \mathcal{X}(F)$ mit F in \mathcal{P}_b , wenn $\mathcal{X} \in \text{Kron regulär ist.}$

Zum Beweis benötigen wir folgendes

Lemma:

Sei X ein regulärer $S(E)$ -Modul. Dann ist für jeden Unterraum H der Dimension q die Sequenz

$$0 \rightarrow \wedge^q H \otimes X(-q) \rightarrow \wedge^{q-1} H \otimes X(-q+1) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes X(-1) \rightarrow X$$

exakt in den homogenen Komponenten vom Grad $p \in \{-n+q, \dots, 0\}$.

Beweis:

Wir machen Induktion über q : Für $q = 0$ ist die Aussage offenbar richtig. Wähle einen Unterraum H' von H der Kodimension 1 mit Komplement ke . Wir haben einen Isomorphismus von $\wedge^m H' \otimes \wedge^{m-1} H'$ in $\wedge^m H$ mit der Inklusion als erster und der äußeren Multiplikation mit e als zweiter Komponente. Die dadurch definierte Projektion von $\wedge^m H$ auf $\wedge^{m-1} H'$ ist verträglich mit den Multiplikationen, d.h. das Diagramm $\wedge^m H \otimes X(-1) \rightarrow \wedge^{m-1} H \otimes X$

$$\begin{array}{ccc} \wedge^m H \otimes X(-1) & \rightarrow & \wedge^{m-1} H \otimes X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \wedge^{m-1} H' \otimes X(-1) & \rightarrow & \wedge^{m-2} H' \otimes X \end{array}$$

ist kommutativ.

Daher ist auch folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow 0 & \rightarrow & \wedge^q H' \otimes X(-q) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & H' \otimes X(-1) \rightarrow H' \otimes X(-1) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow \\ 0 \rightarrow \wedge^{q-1} H' \otimes X(-q+1) & \rightarrow & \wedge^q H \otimes X(-q) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & H \otimes X(-1) \rightarrow H \otimes X(-1) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow \\ 0 \rightarrow \wedge^q H' \otimes X(-q-1) & \rightarrow & \wedge^{q-1} H' \otimes X(-q) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & H' \otimes X(-1) \rightarrow X(-1) \rightarrow \frac{H \otimes X(-1)}{H' \otimes X(-1)} \rightarrow 0 \end{array}$$

Die vertikalen Sequenzen des Diagramms sind exakt, und da aufgrund der Regularität von X die Kroneckermoduln $E/H' \otimes X_{-p}/H'X_{-p-1} \rightarrow X_{-p+1}/H'K_{-p}$ torsionsfrei sind für

alle H' mit $\text{codim } H' > p$, gilt das insbesondere für den Unterraum H' , welcher die Kodimension $n+1-q$ hat, wo also $\text{codim } H' > p$ ist für $p \in \{1, \dots, n-q\}$. Also folgt, daß die Multiplikation mit $e: X(-1) \rightarrow HX(-1)/H'X(-1) \subset X/H'X(-1)$, betrachtet in der homogenen Komponente von $X(-1)$ vom Grad $-p+1$, als Kern H'^K_{-p-1} hat. Daher und nach Induktionsannahme sind die äußeren horizontalen Sequenzen exakt in den Komponenten vom Grad $p \in \{-n+q, \dots, 0\}$ (die obere) bzw. p in $\{-n+p+1, \dots, 0\}$ (die untere), so daß wir auf die behauptete Exaktheitseigenschaft der mittleren schließen können. qed Lemma

Für den Beweis des Theorems setzen wir $X = X(\infty)$. Aus dem Lemma folgt die Exaktheit der Sequenz $0 \rightarrow \wedge^q H \otimes X_{-n} \rightarrow \wedge^{q-1} H \otimes X_{-n+1} \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes X_{-n+q-1} \rightarrow X_{-n+q}$, und zwar insbesondere für alle Hyperebenen H von $P(E/E_0)$ und für einen Unterraum E_0 von E der Kodimension $q+1 > 1$. Der Kokern von $\Omega_{P(E/E_0)}(1) \otimes X_{-n+q-1} \rightarrow \mathcal{O} \otimes X_{-n+q}$ hat daher konstante Faserdimension über geometrischen Punkten und ist also nach dem Lemma von Nakayama (Mumf., ITAG, p. 301) ein Vektorbündel F_{q, E_0} mit einer Auflösung $0 \rightarrow \wedge^q \Omega(1) \otimes X_{-n} \rightarrow \wedge^{q-1} \Omega(1) \otimes X_{-n+1} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega(1) \otimes X_{-n+q-1} \rightarrow \mathcal{O} \otimes X_{-n+q} \rightarrow F_{q, E_0} \rightarrow 0$, die Γ -azyklisch ist nach Lemma 1.7, und also ist F_{q, E_0} global erzeugt. Es folgt leicht, daß F_{q, E_0} in \mathcal{V}_0 liegt. Außerdem ist $X_{-n+q} = \Gamma(F_{q, E_0})$ und $\Gamma(F_{q, E_0}(-1))$ kanonisch zu $H^1(\Omega) \otimes X_{-n+q-1} = X_{-n+q-1}$ isomorph, so daß bei geeigneter Identifizierung das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \otimes \Gamma(F_{q, E_0}(-1)) & \rightarrow & \Gamma(F_{q, E_0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \otimes X_{-n+q-1} & \longrightarrow & X_{-n+q} \end{array}$$

kommutativ ist. Insbesondere gilt dies für $q = n$, womit die eine Richtung der Aussage des Theorems bewiesen ist.

Sei nun ein Vektorbündel F in Mod_0 gegeben. Zeigen wir, daß der assoziierte Modul X mit den Komponenten $X_m = \Gamma(F(m))$ regulär ist. Sei $H \subset E$ Unterraum der Dimension q mit $n+1-q > p > 0$. Beweisen wir, daß für beliebiges $e \in E$, $e \notin H$, die Sequenz $H \otimes X_{-p-1} \rightarrow X_{-p} \rightarrow X_{-p+1}/HX_p$ exakt ist. Die Koszulsequenz $0 \rightarrow \wedge^q H \otimes S(E)(-q) \rightarrow \wedge^{q-1} H \otimes S(E)(-q+1) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes S(E)(-1) \rightarrow S(E) \rightarrow S(E)(1)/HS(E)$ ist exakt bis zur Stelle $H \otimes S(E)(-1)$ einschließlich, weil irgendeine Basis von H eine $S(E)$ -reguläre Sequenz bildet im üblichen Sinne für graduierte $S(E)$ -Moduln (z.B. [Altman, Kleiman, Intr. Dual. Th., III, 3.1]). Dies ist ganz elementar genauso wie der Beweis der Exaktheit an der Stelle $S(E)$.

Wenden wir auf die obige Sequenz den exakten Funktor an, der graduierten $S(E)$ -Moduln auf die klassische Weise $P(E)$ -Moduln zuordnet (siehe Einleitung), der insbesondere $S(E)(-q)$ zu $\mathcal{O}(-q)$ macht. Tensorieren wir dann mit $F(-p)$, erhalten wir die exakte Sequenz $0 \rightarrow \wedge^q H \otimes F(-p-q) \rightarrow \wedge^{q-1} H \otimes F(-p-q-1) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes F(-p-1) \rightarrow F(-p) \rightarrow F(-p-1)/HF(-p)$. Da F in \mathcal{V}_0^E liegt, ist sie für $-p-q \geq -n$, d.h. $n+1-q > p$, Γ -azyklisch, so daß die Sequenz der Schnitte, speziell also die Sequenz $H \otimes \Gamma(F(-p-1)) \rightarrow \Gamma(F(-p)) \rightarrow \Gamma(F(-p+1))/H \cdot \Gamma(F(-p))$ exakt ist.

Aus dieser Charakterisierung läßt sich mit einiger Rechnung ableiten, daß die Einschränkung auf E/E_0 eines regulären Kroneckermoduls \mathcal{X} über E regulär ist (über E/E_0). Das bedeutet, daß es ein Vektorbündel \bar{F} in Mod^{E/E_0} gibt mit $\mathcal{X}(\bar{F}) = \mathcal{X}|_{E/E_0} = \mathcal{X}(F)|_{E/E_0}$. Die Einschränkung $F|_{P(E/E_0)}$ von F auf den Unterraum $P(E/E_0) \subset P(E)$ ist offenbar ein Vektorbündel in \mathcal{V}_0^{E/E_0} , und es ist nach Definition klar, daß $\mathcal{U}(\mathcal{X}|_{E/E_0}) = F|_{P(E/E_0)}$ ist.

Satz:

Sei $E_0 \subset E$ und F in \mathcal{V}_0^E , dann ist die Einschränkung $F|_{P(E/E_0)}$ in \mathcal{V}_0^{E/E_0} , und es gilt $\mathcal{X}(F|_{P(E/E_0)}) = \mathcal{X}(F)|_{E/E_0}$.

Diesen Satz kann man auch direkter durch Induktion nach n beweisen. Wir verwenden ihn jedoch nur in einer trivialen Weise im letzten Abschnitt dieser Arbeit und lassen daher den Beweis aus. Wir bemerken noch, daß aus der Gleichung dieses Satzes mit Lemma 2.91 folgt, daß ein Vektorbündel in \mathcal{V}_0 einen trivialen Summanden $\neq 0$ hat, wenn die Einschränkung auf einen Unterraum diese Eigenschaft hat. Diese Aussage ist für Bündel nicht in \mathcal{V}_0 nicht richtig.

4. Die abgeleiteten Bündel eines polynomialen Vektorbündels

Wir setzen weiterhin k als algebraisch abgeschlossen und außerdem $n > 1$ voraus (vgl. Satz 3.1).

4.1 Wenn wir uns den Beweis der Exaktheit des universellen Komplexes an der mit $*$ bezeichneten Stelle von 2.6 nochmal ansehen, so bemerken wir, daß die dortige Sequenz $** \ 0 \rightarrow \wedge^n H \otimes F(-n) \rightarrow \wedge^{n-1} H \otimes F(-n+1) \rightarrow \dots \rightarrow H \otimes F(-1) \rightarrow F$ auch Γ -azyklisch ist, wenn wir an F schwächere Kohomologiebedingungen stellen, die wir mit weiteren Konsequenzen in folgendem Satz formulieren:

Satz:

Sei $F \in \mathcal{M}_0$ mit $H^1(F(m)) = 0$ für $i > 0$ und $-n < m < 0$ und $H^1(F(-n)) = 0$ für $0 < i < n-2$.

Dann ist $0 \rightarrow \wedge^n \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-n)) \xrightarrow{f_n} \wedge^{n-1} \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-n+1)) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-2)) \rightarrow \mathcal{Q}(1) \otimes \Gamma(F(-1)) \xrightarrow{f_1} 0 \otimes \Gamma(F) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{X}(F)) \rightarrow 0$ exakt und $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))$ ist Vektorbündel in \mathcal{M}_h mit

1. $\Gamma(\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))(m)) = \Gamma(F(m))$ für $-n \leq m \leq 0$ und
2. $\text{Rang } \mathcal{U}(\mathcal{X}(F)) = \text{Rang } F - \dim H^n(F(-n)) + \dim H^{n-1}(F(-n))$.
(f_1 sind in 2.6 definiert)

Beweis:

Den Beweis von Theorem 2.6 übernehmen wir unter den obigen Bemerkungen bis zur Exaktheit an der Stelle $0 \otimes \Gamma(F)$ ($*$). Nach Definition von $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))$ als Kokern von f_1 (2.4) ist die ganze Sequenz dann trivialerweise exakt.

Zeigen wir nun, daß die Fasern von $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))$ konstante Dimension haben: Nach Lemma 2.6 gilt: $\text{Rang } F = \text{Rang } F(-n) = \sum_{m=0}^n (-1)^{m+n} \binom{n}{m} \chi(F(-n))(m)$ und aufgrund der Kohomologiebedingungen $\chi(F(-n))(m) = \dim \Gamma(F(-n+m))$ für $m > 0$ und $\chi(F(-n))(0) = (-1)^n \dim \Gamma(F(-n)) - \dim H^{n-1}(F(-n)) + \dim H^n(F(-n))$, so daß wir daraus die alternierende Summe der Faserdimensionen der universellen Auflösung für $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))$ berechnen können: Sie ist $\text{Rang } \mathcal{U}(\mathcal{X}(F)) +$

Rang $F + \dim H^{n-1}(F(-n)) - \dim H^n(F(-n))$, also unabhängig von der Faser. Daher ist nach [Mumf., ITAG, p292] $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))$ ein Vektorbündel vom angegebenen Rang, da die alternierende Summe der Faserdimensionen generisch auch 0 ist. Nach Lemma 2.8.2 ist $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F)) \in \mathcal{V}_0$.

Zur Berechnung der globalen Schnitte von $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))$ verwenden wir Lemma 3.1 mit der mit $\mathcal{U}(m)$ tensorierten universellen Auflösung von $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))$. Nach Lemma 1.7 ist $H^m(\Lambda^m \mathcal{Q}) = k$ und alle sonst vorkommenden Kohomologiegruppen = 0, so daß an der m -ten Stelle des Komplexes der m -ten Kohomologiegruppen von 3.1 allein $H^m(\Lambda^m \mathcal{Q}) \otimes \Gamma(F(-m)) = \Gamma(F(-m))$ steht und sonst nur 0. Daher ist $H^0(\mathcal{U}(\mathcal{X}(F))(-m)) = \Gamma(F(-m))$. ged.

4.2 Definition:

1. Wenn $F \in \mathcal{V}_0$ ist mit $H^i(F(-n-1)) = 0$ für $0 < i \leq n-2$, dann läßt sich also Satz 4.1 auf $F(-1)$ anwenden. Das Bündel $\mathcal{U}(\mathcal{X}(F(-1))) \in \mathcal{V}_0$ heißt erste Ableitung von F und wird mit F_{-1} bezeichnet. Wenn F die Eigenschaft $H^i(F(-n-2)) = 0$ für $0 < i < n-2$ hat, existiert die erste Ableitung von $F(-1)$. Sie heißt zweite Ableitung von F und wird mit F_{-2} bezeichnet. Entsprechend definieren wir die m -te Ableitung von F, falls sie existiert.

2. Ein Vektorbündel $F \in \mathcal{V}_0$ mit $H^i(F(m)) = 0$ für $0 < i \leq n-2$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ heißt polynomiales Vektorbündel. Für ein solches Bündel ist die m -te Ableitung definiert.

Bemerkung:

Jedes Vektorbündel in \mathcal{V}_0 auf P_2 ist polynomial!

Die Zuordnung $F \mapsto F_{-m}$ ist ein Endofunktor von \mathcal{V}_0 , der exakt ist, weil \mathcal{U} und \mathcal{X} es auf Kron_0 und \mathcal{V}_0 sind, wie aus folgendem Lemma hervorgeht:

Lemma:

Wenn F polynomial ist, dann auch F_{-1} und $(F_{-1})_{-1} = F_{-2}$.
Insbesondere gilt nach 4.1.2: $\Gamma(F_{-m}(k)) = \Gamma(F(k-m))$.

Beweis:

Aus der mit $\mathcal{O}(-n-2)$ tensorierten universellen Erweiterung von F erschließen wir sofort $H^1(F_{-1}(-n-1)) = 0$ für $0 < 1 \leq n-2$. Daher existiert $(F_{-1})_{-1}$ und ist nach Definition $\mathcal{M}(\mathcal{X}(F_{-1}(-1))) = \mathcal{M}(\mathcal{X}(F(-2))) = F_{-2}$ wieder nach Definition, und die zweite Gleichung gilt nach Satz 4.1.1. ged.

Wir wollen einem polynomialen Vektorbündel ein Polynom in $\mathbb{Z}^2[t]$ zuordnen, das in dieser Arbeit nur eine Veranschaulichungsbedeutung hat und von gewissen diskreten Invarianten bestimmt wird. Den Grad des Polynoms nennen wir Stufe des Bündels, weil Grad eines Vektorbündels F schon als die Zahl $\text{grad } F = m \in \mathbb{Z}$ mit $\wedge^r F \cong \mathcal{O}(m)$ definiert ist, wobei $r = \text{Rang } F$ ist.

Satz:

Sei F ein polynomiales Bündel.

1. Für genügend großes m ist $F_{-m} = 0$.

2. Es gibt eine natürliche exakte Sequenz

$0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Y_{-m} \rightarrow F_{-m-1}(1) \rightarrow F_{-m} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O} \otimes Z_{-m} \rightarrow 0$, wobei der letzte Pfeil die Projektion auf den maximalen trivialen Summanden von F_{-m} ist und Y_{-m} und Z_{-m} sind Vektorräume.

Beweis:

1.: Nach Definition von F_{-m} ist $F_{-m} = 0$, wenn $\Gamma(F(-m)) = 0$ ist. Wegen der Serre-Dualität (1.5.4) ist $\Gamma(F(-m))^* = \text{Ext}^0(\mathcal{O}, F(-m))^* = \text{Ext}^n(F(-m), \wedge^n \mathcal{Q}) = H^n(F^*(m-n-1))$, wobei der letzte Raum nach 1.5.3 für genügend große m Null wird.

2.: Nach Definition ist $\mathcal{X}(F_{-m}) = E \otimes \Gamma(F(-m-1)) \rightarrow \Gamma(F(-m))$ und nach Lemma 3.4 gilt $\mathcal{X}(F_{-m-1}(1)) = \mathcal{X}(F_{-m-1})(1) = E \otimes \Gamma(F(-m-1)) \rightarrow (E \otimes \Gamma(F(-m-1))) / \wedge^2 E \otimes \Gamma(F(-m-2))$. Das Bild von $\wedge^2 E \otimes \Gamma(F(-m-2))$ liegt offenbar im Kern von

$\mathcal{X}(F_{-m})$, so daß wir einen Homomorphismus von Kroneckermoduln $\mathcal{X}(F_{-m-1}(1)) \rightarrow \mathcal{X}(F_{-m})$ bilden können, dessen erste Komponente die Identität auf $E \otimes \Gamma(F_{-m-1})$ sei und dessen zweite Komponente durch die Abbildung $\mathcal{X}(F_{-m})$ induziert werde. Daher ist auch klar, daß Kern und Kokern dieses Homomorphismus nur triviale Kroneckermoduln sein können, die wir mit $E \otimes 0 \rightarrow Y_{-m}$ und $E \otimes 0 \rightarrow Z_{-m}$ bezeichnen. Nach Lemma 2.9 ist $E \otimes 0 \rightarrow Z_{-m}$ der maximale triviale Summand von $\mathcal{X}(F_{-m})$. Da alle Kroneckermoduln in Kron_0 liegen, wenden wir \mathcal{U} an und erhalten die obige exakte Sequenz. ged.

4.3 Definition:

Sei F polynomiales Vektorbündel.

1. Die Sequenz in obigem Satz heißt m-te universelle Erweiterung von F .
2. Das kleinste m mit $F_{-m} = 0$ heißt Stufe von F .
3. Wir ordnen jedem polynomialen Vektorbündel das Polynom $\wp(F) = (y_{-m}, z_{-m}) T^m + (y_{-m+1}, z_{-m+1}) T^{m-1} + \dots + (y_{-1}, z_{-1}) T + (y_0, z_0)$ aus $Z^2[T]$ zu, wobei $z_{-i} = \dim Z_{-i} =$ Dimension des maximalen trivialen Summanden der i -ten Ableitung von F , $y_{-i} = \dim Y_{-i} =$ Rang des Kerns von $F_{-i-1}(1) \rightarrow F_{-i}$ der i -ten universellen Erweiterung von F ist und m die Stufe von F .

Bemerkung:

Die Koeffizienten bezeichnen wir statt mit (y_{-m+i}, z_{-m+i}) auch mit (y_i, z_i) . Das Polynom $\wp(F)$ nennen wir das Polynom von F . Die Redeweise "Ein Vektorbündel F mit Polynom \wp " soll beinhalten, daß F polynomial ist. Der "höchste" Koeffizient hat immer die Form $(0, z_0)$, da aus $F_{-m-1} = 0$ auch $\Gamma(F_{-m-1}) = 0$ folgt (4.2 Lemma), so daß $\mathcal{X}(F_{-m}) = E \otimes 0 \rightarrow (F_{-m})$ ist, also F_{-m} ein triviales Bündel mit "entarteter" universeller Erweiterung.

Die Multiplikation des Koeffizientenbereiches \mathbb{Z}^2 ist hier unerheblich. Es ist jedoch sicherlich interessant zu fragen, ob sich auf \mathbb{Z}^2 eine Multiplikation definieren läßt, so daß $\gamma(F \otimes G) = \gamma(F) \cdot \gamma(G)$ ist. Dies ist für eine Summe von Geradenbündeln möglich und es gilt offensichtlich die Formel $\gamma(F \oplus G) = \gamma(F) + \gamma(G)$.

Definieren wir in $\mathbb{Z}^2 [T]$ die lineare Abbildung, die "Ableitung" δ , durch $\delta(T^i) = T^{i-1}$ für $i > 0$ und $\delta(y, z) = 0$, so gilt $\gamma(F_{-1}) = \delta^1(\gamma(F))$. Dies folgt durch Induktion aus Lemma 4.2 (δ kann man als Derivation einer Algebra von dividierten Potenzen interpretieren).

Wenn für $F \in \mathcal{A}_0$ auch $F(-1)$ in \mathcal{A}_0 liegt, ist es klar, daß $F_{-1} = F(-1)$ ist. Da der Funktor "Ableitung" $()_{-1}$ im Gegensatz zur "Verschiebung" (-1) nicht aus der Unterkategorie der polynomialen Bündel herausführt, kann man $()_{-1}$ wenigstens für P_2 , wo jedes Bündel in \mathcal{A}_0 polynomial ist, als natürliche Erweiterung von (-1) ansehen. Auf der Seite der Kroneckermoduln in Kron_0 ist $()_{-1}$ definiert durch $E \otimes X_{-1} \xrightarrow{\mathcal{X}} X_0 \mapsto E \otimes X_{-2} \xrightarrow{\mathcal{X}} X_{-1}$ nach Lemma 3.4.2, wobei X_{-2} die (-2) -te Komponente des zu \mathcal{X} assoziierten graduierten Moduls $X(\mathcal{X})$ ist (3.4.3.). In Grad^E stimmt $()_{-1}$ daher mit (-1) überein, und nach obigem Lemma (4.2) können wir mit Hilfe der Tatsache, daß $\Gamma(F_{-m}(k)) = \Gamma(F(k-m))$ ist (induktiv aus 1.4.2), die Folgerung 3.4 für P_2 neu formulieren:

Folgerung:

Der Funktor $X: \text{Mod}_0^E \rightarrow \text{Grad}$ ist eine volltreue Einbettung und es gilt $X(F_{-1}) = X(F)(-1)$.

Für Kron^{k^2} (d.h. P_1) stimmt die Ableitung $()_{-1} = (-1)$ mit dem Coxeterfunktor C^+ überein [Dlab-Ringel], mit dessen Hilfe sich die Kroneckermoduln mit zwei Pfeilen klassifizieren lassen. Dies ist ein Hinweis

auf die Bedeutung von $()_{-1}$ für die Klassifikation von Vektorbündeln auf P_2 , die den Kroneckermoduln mit drei Pfeilen entsprechen (s. 5.).

4.4. Wir wollen zu gegebenem Polynom $\gamma = \sum_{i=0}^m (y_i, z_i) \cdot T^{m-1}$ mit $z_0 > 0$ und $y_i, z_i \geq 0$ ein polynomiales Vektorbündel konstruieren.

Seien Y_1, Z_1 Vektorräume mit $\dim Y_1 = y_1$ und $\dim Z_1 = z_1$. Wenn $m = 0$ ist, haben wir offenbar nur die Möglichkeit (bis auf Isomorphie) $\mathcal{O} \otimes Z_0$ (Bem. 4.3.2). Ein polynomiales Bündel F_1 der Stufe 1 hat dann eine universelle Erweiterung der Form $0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Y_1 \xrightarrow{i_1} \mathcal{O}(1) \otimes Z_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z_1 \rightarrow 0$, eines der Stufe 2 mit Ableitung F_1 hat dann eine universelle Erweiterung $(*)$ $0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Y_2 \xrightarrow{i_2} F_1(1) \rightarrow F_2 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z_2 \rightarrow 0$. Offensichtlich ist F_1 Kokern der durch i_1 gegebenen Injektion $\mathcal{O} \otimes Y_1 \hookrightarrow \mathcal{O}(1) \otimes Z_0 \oplus \mathcal{O} \otimes Z_1$ und F_2 ist der Kokern der durch i_2 induzierten $\mathcal{O} \otimes Y_2 \hookrightarrow F_1(1) \oplus \mathcal{O} \otimes Z_2$. Da $\text{Ext}^1(\mathcal{O} \otimes Y_2, \mathcal{O}(1) \otimes Y_1) = H^1(\mathcal{O}(1))^{y_1 \cdot y_2} = 0$ ist, läßt sich i_2 nach $\mathcal{O}(2) \otimes Z_0 \oplus \mathcal{O}(1) \otimes Z_1$ hochheben und F_2 ist daher auch Kokern von $\mathcal{O} \otimes Y_2 \oplus \mathcal{O}(1) \otimes Y_1 \rightarrow \mathcal{O}(2) \otimes Z_0 \oplus \mathcal{O}(1) \otimes Z_1 \oplus \mathcal{O} \otimes Z_2$. Per Induktion haben wir das

Lemma:

Jedes Vektorbündel F mit Polynom $\sum_{i=0}^m (y_i, z_i) T^{m-1}$ ist Kokern einer Injektion $\prod_{i=0}^m \mathcal{O}(1)^{y_{m-i}} \rightarrow \prod_{i=0}^m \mathcal{O}(1)^{z_{m-i}}$ und daher ist $\text{Rang } F = \sum_{i=0}^m (z_{m-1} - y_{m-1})$ und $\dim \Gamma(F) = \sum_{i=0}^m \binom{m+i}{n} (z_{m-1} - y_{m-1})$.

4.5 Wir haben eben gesehen, daß polynomiale Bündel der Stufe 1 Kokern von notwendigerweise faserweisen Injektionen der Form $\mathcal{O} \otimes Y_1 \xrightarrow{i_1} \mathcal{O}(1) \otimes Z_0 \oplus \mathcal{O} \otimes Z_1$ sind. Betrachten wir $\mathcal{K}(i_1)$, so sehen wir, daß F_1 durch eine Injektion (Inklusion bis auf Isomorphie) $Y_1 \subset E \otimes Z_0 \oplus Z_1$ bestimmt ist, d.h. durch ein Element von $\text{Gr}_{y_1}(E \otimes Z_0 \oplus Z_1)$, denn $\mathcal{K}(F_1) = \text{Kokern } \mathcal{K}(i_1)$ ist gleich $E \otimes Z_0 \rightarrow (E \otimes Z_0 / Y_1) \oplus Z_1$. Wenn wir Z_0 mit X_0 und $E \otimes Z_0 \oplus Z_1$ mit X_1 bezeichnen und Y_1 als Unterraum von X_1

ansehen, ist $\mathcal{X}(F_1) = E \otimes X_0 \rightarrow X_1/Y_1$ und nach Lemma 3.4 erhalten wir $\mathcal{X}(F_1(1)) = E \otimes (X_1/Y_1) \rightarrow E \otimes (X_1/Y_1) / \wedge^2 E \otimes X_0$.

Wenden wir auf die universelle Erweiterung von F_2 (4.4) den Funktor \mathcal{X} an, erhalten wir die Erweiterung von Kroneckermoduln

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E \otimes 0 & \longrightarrow & E \otimes (X_1/Y_1) & = & E \otimes (X_1/Y_1) \rightarrow E \otimes 0 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & Y_2 & \longrightarrow & (E \otimes (X_1/Y_1)) / \wedge^2 E \otimes X_0 & \longrightarrow & \Gamma(F_2) \rightarrow Z_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

Hieran sehen wir, daß $(*)$ in 4.4 eindeutig bis auf Isomorphie durch die Vektorräume Z_0, Z_1, Z_2 , das Element $Y_1 \in \text{Gr}_{Y_1}(E \otimes Z_0 \oplus Z_1)$ sowie den Unterraum Y_2 von $(E \otimes (X_1/Y_1)) / \wedge^2 E \otimes X_0$ bestimmt ist. Y_2 ist jedoch von dem speziellen Bündel F_2 abhängig. Um davon loszukommen, können wir Y_2 auch als Unterraum von $E \otimes X_1$ auffassen, der $E \otimes Y_1$ und $\wedge^2 E \otimes X_0$ (d.h. das Bild der kanonischen Abbildung) enthält.

Gehen wir noch einen Schritt weiter und nehmen an, F_2 sei Ableitung eines Bündels F_3 mit Polynom $\sum_{i=0}^3 (y_i, z_i) \cdot T^{3-i}$. Nennen wir $X_2 := E \otimes X_1 \oplus Z_2$ und fassen $Y_2 \subset E \otimes X_1$ als Unterraum von X_2 auf. Der Kroneckermodul von F_2 ist dann $E \otimes (X_1/Y_1) \rightarrow X_2/Y_2$ und die universelle Erweiterung von F_3 als solche von Kroneckermoduln ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E \otimes 0 & \longrightarrow & E \otimes (X_2/Y_2) & = & E \otimes (X_2/Y_2) \rightarrow E \otimes 0 \rightarrow 0 \\ (*) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & Y_3 & \xrightarrow{f} & (E \otimes (X_2/Y_2)) / \wedge^2 E \otimes (X_1/Y_1) & \longrightarrow & \Gamma(F_3) \rightarrow Z_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

Die kanonische Abbildung $\wedge^2 E \otimes (X_1/Y_1) \rightarrow E \otimes (X_2/Y_2)$ ist dabei durch $e \wedge f(x \bmod Y_1) \mapsto e \otimes ((f \circ x) \bmod Y_2) - f \otimes ((e \circ x) \bmod Y_2)$ gegeben, also durch $\mathcal{X}(F_2) = E \otimes (X_1/Y_1) \rightarrow X_2/Y_2$ induziert und daher wohldefiniert.

F_3 ist also durch $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Y_1 \in \text{Gr}_{Y_1}(X_1), Y_2 \in \text{Gr}_{Y_2}(X_2)$ sowie $Y_3 \in \text{Gr}_{Y_3}(X_3)$ bestimmt, wenn wir Y_3 als Unterraum von $E \otimes X_2$ also auch von $X_3 = E \otimes X_2 \oplus Z_3$ ansehen, der $E \otimes Y_2$ und das Bild von $\wedge^2 E \otimes X_1$ enthält,

welches offensichtlich der Kern der Multiplikation $E \otimes X_2 \rightarrow S^3(E) \otimes Z_0 \oplus S^2(E) \otimes Z_1 \oplus E \otimes Z_2$ ist. Tatsächlich können wir mit den angegebenen Räumen und Inklusionen die universelle Erweiterung von F_3 als Sequenz $(*)$ konstruieren:

Die Inklusionen $E \otimes Y_1 \subset Y_2 \subset X_2$ gestatten die Definition der natürlichen Abbildung $\wedge^2 E \otimes (X_1/Y_1) \rightarrow E \otimes (X_2/Y_2)$ (siehe oben), die durch $Y_3/E \otimes Y_2$ faktorisiert, da das Bild von $\wedge^2 E \otimes X_1 \subset Y_3$ ist. Daher induziert die Inklusion $Y_3 \subset E \otimes X_2$ die Injektion $Y_3/(E \otimes Y_2 + \wedge^2 E \otimes X_1) \hookrightarrow E \otimes (X_2/Y_2) / \wedge^2 E \otimes (X_1/Y_1)$, das ist unter Beachtung der anderen Deutung des Vektorraumes Y_3 dieselbe wie 1 in $(*)$.

Bezeichnung:

Sei ein Polynom $p = \sum_{i=0}^m (y_i, z_i) T^{m-i}$ in $Z^2[T]$ gegeben (4.3) mit $y_0 = 0, z_0 > 0$ und $y_i, z_i \geq 0$ und seien Z_i Vektorräume der Dimension z_i . Setze $X_j = \sum_{i=0}^j E \otimes^i Z_{j-i}$ und beachte, daß in natürlicher Weise $E \otimes X_{j-1} \subset X_j = E \otimes X_{j-1} \oplus Z_j$ ist. Sei W_j der Kern der kanonischen Abbildung $X_j \rightarrow \sum_{i=0}^j S^i(E) \otimes Z_{j-i}$ und $u_i = \dim W_i + \sum_{k=0}^i \binom{k+n}{n} y_{i-k}$.

Wir definieren $\mathcal{V}_p = \emptyset$ für $m < 0$, \mathcal{V}_p für $m = 0$ als $Gr_{u_0}(X_0) = \{Y_0\} = \{0\}$ und für $m > 0$ als die Menge der m -Tupel (Y_0, Y_1, \dots, Y_m) in $Gr_{u_0}(X_0) \times \dots \times Gr_{u_m}(X_m)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $W_j \subset Y_j \subset E \otimes X_{j-1}$
2. $E \otimes Y_{j-1} \subset Y_j$
3. $\mathcal{M}(E \otimes X_{j-1} \rightarrow X_j/Y_j)$ ist ein Vektorbündel vom Rang $r_j = \sum_{i=0}^j (z_i - y_i)$.

(Wir weisen darauf hin, daß nicht y_i sondern u_i die Dimension von Y_i ist, da aufgrund der obigen Interpretation nicht $\mathcal{O} \otimes Y_i$ sondern $\mathcal{O} \otimes (Y_i / (E \otimes Y_{i-1} + W_i))$ der Kern von $F_{i-1}(1) \rightarrow F_i$ ist.)

Da die Bündel $F_j = \mathcal{M}(E \otimes X_{j-1} \rightarrow X_j/Y_j)$ sich als polynomial mit Polynom $\delta^{m-j} p = \sum_{i=0}^j (y_i, z_i) T^{j-i}$ erwiesen sollen, müssen wir nach Lemma 4.4 den obigen Aus-

druck für z_j einsetzen, denselben Grund hat auch die Definition von $u_1 = \dim Y_1$ (siehe Schluß des nächsten Abschnittes).

4.6 Einen Ansatz zur Interpretation von V_p^j als Menge von polynomialen Vektorbündeln der Stufe m mit j -ter Ableitung in $V_{\delta^j p}$, wobei $\delta^j p$ die j -te Ableitung von p im Sinne von 4.3 ist, haben wir eben gemacht. Hier führen wir sie aus:

Wenn $V_p = \emptyset$ ist, also $p = 0$, wollen wir an das Vektorbündel mit Faser 0 denken; der Punkt in $V_p = \{0\}$, d.h. $p = \text{konstant} \neq 0$, repräsentiere das triviale Bündel $0 \otimes Z_0$, sein Kroneckermodul ist $E \otimes 0 \rightarrow X_0/Y_0$. Nehmen wir nun an, wir hätten gezeigt, daß die Vektorbündel $\mathcal{U}(E \otimes X_{m-2} \rightarrow X_{m-1}/Y_{m-1})$ polynomial mit Polynom $\gamma' = \sum_{i=0}^{m-1} (y_i, z_i)^{T^{m-1-i}}$ sind und Kroneckermodul $\mathcal{K}(G) = E \otimes X_{m-2}/Y_{m-2} \rightarrow X_{m-1}/Y_{m-1}$ haben ($m > 0$, setze $X_{-1} = Y_{-1} = 0$). Wie in 4.5 am Beispiel F_3 ausgeführt, haben wir folgende exakte Sequenz von Kroneckermoduln:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & E \otimes 0 & \longrightarrow & E \otimes (X_{m-1}/Y_{m-1}) & = & E \otimes (X_{m-1}/Y_{m-1}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & Y_m / (E \otimes Y_{m-1} + R \otimes X_{m-2}) & \rightarrow & E \otimes (X_{m-1}/Y_{m-1}) / (E \otimes (X_{m-2}/Y_{m-2})) & \rightarrow & (E \otimes X_{m-1}) / Y_m \rightarrow 0 \\
 \text{Abk.} & & \frac{\bar{Y}_j}{E \otimes X_{j-1}} = \frac{Y_j}{E \otimes X_{j-1}} & & \} \text{ mod } (E \otimes Y_{j-1} + W_j) & &
 \end{array}$$

Wir wollen zeigen, daß 1 eine faserweise Injektion $0 \otimes \bar{Y}_m \rightarrow G(1)$ induziert und $\dim \bar{Y}_m = Y_m$ ist. Dann liegt nämlich das Bündel $\mathcal{U}(\lambda) = \mathcal{U}(E \otimes X_{m-1} \xrightarrow{\lambda} (E \otimes X_{m-1})/Y_m)$ als Kokern von $0 \otimes \bar{Y}_m \rightarrow G(1)$ in $V_{\bar{Y}_m}$ und also auch $F = \mathcal{U}(\lambda) \otimes 0 \otimes Z_m$. Dann hat F den Kroneckermodul $E \otimes (X_{m-1}/Y_{m-1}) \rightarrow X_m/Y_m$ und ist polynomial mit Ableitung G und Polynom γ . Betrachten wir dazu die Fasern von $\mathcal{U}(\lambda)$ und $\mathcal{U}(\alpha)$ über dem Punkt H in $\mathcal{P}(E)$: $\mathcal{U}(\lambda)(H) = (E \otimes X_{m-1}/Y_m) \text{ mod } (H \otimes (X_{m-1}/Y_{m-1})) = E \otimes X_{m-1}/(Y_m + H \otimes X_{m-1})$ wegen $H \otimes Y_{m-1} \subset Y_m$ nach

Voraussetzung 2., $G(1)(H) = \mathcal{M}(\lambda)(H) = E \otimes (\bar{X}_{m-1}/\bar{Y}_{m-1}) / \wedge^2 E (\bar{X}_{m-2}/\bar{Y}_{m-2}) \bmod H \otimes (\bar{X}_{m-1}/\bar{Y}_{m-1}) = E \otimes \bar{X}_{m-1} / (E \otimes \bar{Y}_{m-1} + W_m) \bmod H \otimes \bar{X}_{m-1}$. Dabei schreiben wir $\bar{X}_i = X_i/W_i$, entsprechend \bar{Y}_i . Nach Voraussetzung 2. ist nämlich das Bild von $\wedge^2 E \otimes Y_{m-2}$ sowie $H \otimes Y_{m-1}$ in $E \otimes Y_{m-1}$ enthalten und das Bild von $\wedge^2 E \otimes X_{m-1}$ ist offenbar W_m . Da $W_{m-1} \subset W_m$ gilt, ist $\mathcal{M}(\lambda)(H) = E \otimes X_{m-1} / (E \otimes Y_{m-1} + H \otimes X_{m-1} + W_m)$. Dividieren wir nun durch $Y_m / (E \otimes Y_{m-1} + W_m)$ erhalten wir dieselbe Faser wie die von $\mathcal{M}(\lambda)$ über H .

Daher ist $0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes \bar{Y}_m \rightarrow G(1) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z_m \rightarrow 0$ exakt mit $F = \mathcal{M}(\lambda) \otimes \mathcal{O} \otimes Z_m$ und es ergibt sich $r_m = r_{m-1} + z_m - \dim \bar{Y}_m = \sum_{i=0}^m (z_i - y_i)$ nach Voraussetzung. Per Induktionsvoraussetzung können wir r_{m-1} ersetzen und erhalten $\dim \bar{Y}_m = y_m$. Jetzt wollen wir noch $u_m = \dim Y_m$ berechnen: Es ist

(*) $Y_m = \dim \bar{Y}_m = \dim Y_m - \dim (E \otimes \bar{Y}_{m-1} \bmod W_m)$ und es gilt $\Gamma(G(1)) = E \otimes X_{m-1} / (E \otimes Y_{m-1} + W_m) = \bar{X}_m / ((E \otimes \bar{Y}_{m-1} \bmod W_m) \otimes Z_m)$, wie wir bei der Faserberechnung gesehen haben.

Und da G das Polynom δp hat, gilt nach Lemma 4.4 $\dim \Gamma(G(1)) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-i}{n} (z_{m-i} - y_{m-i})$ also $u_m = \dim Y_m = y_m + \dim W_m + \dim \bar{X}_m - z_m - \dim \Gamma(G(1)) = \dim W_m + y_m - z_m + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-i}{n} z_{m-i} - \sum_{i=1}^m \binom{m-i}{n} (z_{m-i} - y_{m-i})$.

Zusammenfassung:

Jedes Komponentenpaar (Y_{j-1}, Y_j) eines Punktes (Y_0, \dots, Y_m) in \mathcal{Y}_p mit $p = \sum_{i=0}^m (Y_i, z_i) T^{m-i}$ induziert einen Kroneckermodul $E \otimes (X_{j-1}/Y_{j-1}) \rightarrow X_j/Y_j$ eines Vektorbündels F_j vom Rang $\sum_{i=0}^j (z_i - y_i)$ mit Polynom $\delta^{m-j} p$ das als Ableitung F_{j-1} und die universelle Erweiterung $\mathcal{O} \otimes (Y_j / (E \otimes Y_{j-1} + W_j)) \rightarrow F_{j-1}(1) \rightarrow F_j \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z_j \rightarrow 0$ hat. Die Injektion wird durch die Inklusion $Y_j \subset E \otimes X_{j-1}$ induziert.

(für $j \in \{1, \dots, m\}$)

Die Projektion $\mathcal{Y}_p \rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_p$ entspricht dem Bilden $(Y_0, \dots, Y_m) \mapsto (Y_0, \dots, Y_{m-1})$

der Ableitung $F \mapsto F_{-1}$.

Wir fassen von nun an \mathcal{V}_p als "Menge" von polynomialen Bündeln mit Polynom p auf. Und daher schreiben wir statt eines Punktes (Y_0, \dots, Y_m) manchmal einfach das zugehörige Bündel.

4.7 Jedes polynomiale Vektorbündel F ist zu einem Bündel in \mathcal{V}_p isomorph, wobei p das Polynom von F ist (Def. 4.3.3).

Nehmen wir an, die Ableitung F_{-1} sei zu einem Bündel in \mathcal{V}_{Sp} isomorph (Induktionsanfang: $F = \mathcal{O} \otimes Z_0$, $p = (0, z_0)$). Dann dürfen wir ohne Einschränkung F_{-1} in \mathcal{V}_{Sp} liegend ansehen. Bis auf Isomorphie ist der maximale triviale Summand von F gleich $\mathcal{O} \otimes Z_m$, so daß $\Gamma(F) = (\Gamma(F_{-1}(1))/Y) \oplus Z_m$ ist für geeignetes $Y \subset \Gamma(F_{-1}(1)) = E \otimes X_{m-1} / (E \otimes Y_{m-1} + \wedge^2 E \otimes X_{m-2})$. Wir finden also ein $Y_m \subset E \otimes X_{m-1}$, das $E \otimes Y_{m-1}$ und das Bild von $\wedge^2 E \otimes X_{m-1}$, d.h. W_m enthält. Nach Definition ist $X_m = E \otimes X_{m-1} \oplus Z_m$, und es ist klar, daß $(F_{-1}, Y_m) \in \mathcal{V}_p$ isomorph zu F ist.

Wir zeigen nun, daß \mathcal{V}_p ein Schema von Vektorbündeln ist und dazu zunächst das

Lemma 1

Die Menge der Vektorbündel vom Rang r induzierenden Elemente in $\text{Gr}(E \otimes X)$ ist lokalabgeschlossen für festes $r \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wir betrachten die tautologischen Bündel mit Faser Y über dem Punkt Y in $\text{Gr}(E \otimes X)(A)$ bzw. $H \otimes X$ über H in $\mathcal{P}(E)$ und schneiden deren Urbilder über $\text{Gr}(E \otimes X) \times \mathcal{P}(E)$ als Unterbündel des trivialen Bündels $\mathcal{O} \otimes E \otimes X$. Der so entstandene $\text{Gr}(E \otimes X) \times \mathcal{P}(E)$ -Modul hat die Faser $Y \cap H \otimes X$ über dem Punkt (Y, H) , und die Menge \overline{W} der Punkte, wo $Y \cap H \otimes X$ konstante Dimension d hat, ist lokalabgeschlossen, offen in der Menge \overline{W} der Punkte mit $\dim Y \cap H \otimes X > d$ [Mumf., ITAG, S.301]. Die Menge \overline{U} der Y in $\text{Gr}(E \otimes X)(k)$, deren Faser unter der Projektion $\overline{W} \xrightarrow{p} \text{Gr}(E \otimes X)$ auf den

ersten Faktor ganz in \tilde{W} liegt, induzieren gerade Vektorbündel von konstantem Rang. Das Komplement von V im Bild $p(W)$ ist offenbar $p(\tilde{W} \setminus W)$, also abgeschlossen, da W vollständig ist, und somit ist V offene Menge in einer abgeschlossenen Teilmenge von $\text{Gr}(E \otimes X)$.

ged.

Theorem:

Sei $\mathcal{Y} = \sum_{i=0}^m (y_i, z_i) T^{m-1} \in Z^2[T]$ und δ die Ableitung (4.3).

1. $V_{\mathcal{Y}}$ ist ein irreduzibles Schema, das offen ist in der abgeschlossenen Inzidenzkorrespondenz, bestehend aus den Paaren (G, Y_m) (s. Zusammenfassung 4.6) mit den Eigenschaften

1. $W_m \subset Y_m \subset E \otimes X_{m-1}$
2. $E \otimes Y_{m-1} \subset Y_m$

2. Jedes polynomiale Vektorbündel auf $P(E)$ mit Polynom der Stufe m , mit Rang $F_{-m+k} = \sum_{i=0}^k (z_i - y_i)$ und $\text{mult}_{E_{m+k}} \mathcal{O} = z_k$ ist isomorph zu einem Vektorbündel in $V_{\mathcal{Y}}$. Die Projektion $(Y_0, \dots, Y_m) \xrightarrow{\pi} (Y_0, \dots, Y_{m-1})$ auf $V_{\delta \mathcal{Y}}$ entspricht dem Bilden der Ableitung $F \mapsto F_{-1}$. Dann ist $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \otimes (Y_m / (E \otimes Y_{m-1} + W_m)) \rightarrow F_{-1}(1) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z_m \rightarrow \mathcal{O}$ die universelle Erweiterung von F .

3. $V_{\mathcal{Y}}$ ist genau dann nicht leer, wenn $V_{\delta \mathcal{Y}}$ nicht leer ist und 1. $r_{m-1} > r_m - z_m \geq n$ oder 2. $r_m = r_{m-1} + z_m$ gilt. Im ersten Fall ist die Dimension von $V_{\mathcal{Y}}$ gleich $\sum_{k=0}^m (r_{k-1} - r_k + z_k) \cdot (\dim X_{k-2k-u_k})$, im zweiten Fall ist die Projektion π bijektiv und das Urbild von G ist $G(1) \otimes \mathcal{O} \otimes Z_m \cdot (u_k : \text{Bez. 4.5})$

Beweis:

Wir haben oben gesehen, daß die Aussage 2. gültig ist. Wir wollen jetzt durch Induktion zeigen, daß $V_{\mathcal{Y}}$ in $V_{\delta \mathcal{Y}} \times \text{Gr}_{u_m}(X_m)$ ein Unterschema ist ($m > 0$). Letzteres ist ein Schema nach Induktionsvoraussetzung und der Anfang ist trivialerweise richtig. Die Bedingung 1.1 an Y_m ist natürlich abgeschlossen in $\text{Gr}_{u_m}(X_m)$. Zeigen wir, daß dies

auch für Bedingung 1.2 richtig ist: Betrachten wir einerseits die Projektion $\mathcal{V}_{Sp}^* \times Gr_{U_m}(X_m) \rightarrow Gr_{U_m}(X_m)$ und andererseits den zusammengesetzten Morphismus $\mathcal{V}_{Sp}^* \times Gr_{U_m}(X_m) \rightarrow \mathcal{V}_{Sp}^* \rightarrow Gr_{U_{m-1}}(X_{m-1}) \rightarrow Gr_{(U_{m-1})U_{m-1}}(E \otimes X_{m-1}) \subset Gr_{(M_1)U_{m-1}}(X_m)$ definiert durch $(Y_0, \dots, Y_{m-1}, Y_m) \mapsto (Y_0, \dots, Y_{m-1}) \mapsto Y_{m-1} \mapsto E \otimes Y_{m-1}$. Sie ergeben einen Morphismus ins Produkt $Gr_{(M_1)U_{m-1}}(X_m) \times Gr_{U_m}(X_m)$. Das Urbild der abgeschlossenen Inzidenzkorrespondenz $\{(Y', Y) \mid Y' \subset Y\}$ ist gerade die durch Bedingung 1.2 definierte Teilmenge, also abgeschlossen. Bezeichnen wir sie mit \mathcal{V} .

Die Bedingung 3. in Bezeichnung 4.5 ist nach obigem Lemma lokalabgeschlossen in $Gr_{(M_1)U_{m-1}}(E \otimes X_{m-1})$, also auch das Urbild in $\mathcal{V}_{Sp}^* \times Gr_{U_m}(X_m)$, so daß der Durchschnitt mit obigen Bedingungen, nämlich \mathcal{V}_{Sp}^* , ein Schema ist. Jetzt zeigen wir, daß \mathcal{V}_{Sp}^* offen in \mathcal{V} ist und irreduzibel; Dazu genügt es nachzuweisen, daß die Projektion $\mathcal{V}_{Sp}^* \xrightarrow{pr} \mathcal{V}_{Sp}^*$ surjektiv ist (für nicht leeres erstes Schema) und die Faser über einem festen $(Y_0, \dots, Y_{m-1}) \in \mathcal{V}_{Sp}^*$ offen in der (irreduziblen) Faser von $\mathcal{V} \rightarrow Gr_{U_m}(X_m) \times \dots \times Gr_{U_{m-1}}(X_{m-1})$
 $(Y_0, \dots, Y_m) \mapsto (Y_0, \dots, Y_{m-1})$

Nach Definition ist die Faser in \mathcal{V} zu $Gr_{Y_m}(E \otimes X_{m-1} / (E \otimes Y_{m-1} + W_m)) = Gr_{Y_m}(\overline{E \otimes X_{m-1}})$ (Abkürzung: 4.5) isomorph. Bekanntlich ist $Inj(Y, \overline{E \otimes X_{m-1}}) \rightarrow Gr_{Y_m}(\overline{E \otimes X_{m-1}})$ ein offener Morphismus (Y ein Vektorraum der Dimension Y_m), und aufgrund obiger Diskussion ist es klar, daß das Urbild der Faser $pr^{-1}(Y_0, \dots, Y_{m-1}) \subset Gr_{Y_m}(E \otimes X_{m-1})$ genau die faserweisen Injektionen in $Inj(\mathcal{O} \otimes Y, G(1)) = Inj(Y, \overline{E \otimes X_{m-1}})$ ist mit $G =$ Bündel zu (Y_0, \dots, Y_{m-1}) . Diese sind per Dualität $f \mapsto f^*$ isomorph zu den Surjektionen in $Hom(G^*(-1), \mathcal{O} \otimes Y^*)$, die eine offene Menge nach folgendem leicht zu beweisenden Lemma bilden:

Lemma:

Die Surjektionen in $Hom(F, \mathcal{O} \otimes Y)$ bilden ein offenes Unterschema, wenn F ein Bündel und Y ein endl. dim. Vektorraum ist.

Damit haben wir die Offenheit der Fasern von $\mathcal{N}_p \xrightarrow{pr} \mathcal{N}_{Sp}$ in den entsprechenden Fasern in \mathcal{N} gezeigt. Zum Beweis der Surjektivität von pr und der Existenzaussage des Theorems benötigen wir das

Lemma 3:

Wenn G in \mathcal{N}_k nicht \emptyset als direkten Summanden hat, gibt es eine faserweise Injektion $\emptyset \rightarrow G$ genau dann, wenn $\text{Rang } G > n$ ist.

Beweis:

Die eine Richtung gilt nach [Atiyah, ell. Cur., I, 5, Th. 2]. Umgekehrt gebe es so eine Injektion, d.h. ein Element s in $\Gamma(G)$, das für keine Hyperebene H von $\mathbb{P}(E)(k)$ im Bild von $H \otimes \Gamma(G(-1))$ liegt. Da $E \otimes \Gamma(G(-1)) \rightarrow \Gamma(G)$ surjektiv ist (2.9), müssen die Bilder der Komponenten $e_i \otimes s_i$ in $\Gamma(G)$ eines s repräsentierenden Elementes von $E \otimes \Gamma(G(-1))$ bezüglich jeder Basis e_i von E linear unabhängig sein. Also hat der Kokern von $H \otimes \Gamma(G(-1)) \rightarrow \Gamma(G)$ eine Dimension $r \geq n+1$. qed Lemma

Sei nun $G \in \mathcal{N}_{Sp}$ und zunächst $r_{m-1} > r_m - z_m \geq n$, dann gibt es nach dem Lemma eine exakte Sequenz $\emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow G(1) \rightarrow H \rightarrow \emptyset$ von Vektorbündeln in \mathcal{N}_0 . Da H keinen trivialen Summanden hat, gibt es nach dem Lemma auch eine faserweise Injektion $\emptyset \rightarrow H$, falls $r_{m-1} - 1 > n$ ist, und diese ist offenbar zu einer faserweisen Injektion in $G(1)$ hochhebbar, die sich mit der gegebenen zu einer Faserinjektion $\emptyset \otimes Y \rightarrow G(1)$ ergänzt mit $\dim Y = 2$. So fortfahrend können wir also eine exakte Sequenz $(E) \emptyset \rightarrow \emptyset \otimes Y \rightarrow G(1) \rightarrow F \rightarrow \emptyset \otimes Z_m \rightarrow \emptyset$ konstruieren, wo wir F als Kokern $j \oplus \emptyset \otimes Z_m$ definieren und wo Y die Dimension $r_{m-1} - r_m + z_m > 0$ hat. Es ist klar, daß F ein polynom. Bündel der Stufe m vom Rang r_m mit Multiplizität z_m von \emptyset in F ist. Außerdem ist $G = F_{-1}$, wie man durch Berechnung der Kroneckermoduln aus (E) feststellt, also ist F ein Urbild von G .

Falls $r_{m-1} = r_m - z_m$ ist, wählen wir das Urbild von G einfach $F = G(1) \oplus \mathcal{O} \otimes Z_m$. Damit haben wir die Aussagen 1., 2. und die Existenzaussage in 3. bewiesen. Da wir aber die Fasern der Projektion $\mathcal{V}_p \rightarrow \mathcal{V}_{Sp}$ kennen, können wir induktiv die Dimension bestimmen: Eine Faser ist zu einer offenen Menge in $Gr_Y(\overline{E \otimes X_{m-1}})$ isomorph, hat also die Dimension $y_m \cdot (\dim E \otimes X_{m-1} - y_m)$. Vor der Zusammenfassung in 4.6 haben wir die Formel (*) $\dim(E \otimes Y_{m-1} \text{ mod } W_m) = u_m - \dim W_m - y_m$ gezeigt. Wenn wir diese einsetzen und die Definition $X_m = E \otimes X_{m-1} + Z_m$ verwenden, erhalten wir als Dimension der Faser $y_m(\dim X_m - z_m - u_m)$. Aus der universellen Erweiterung jeder Ableitung von F erschließen wir $y_m = r_{m-1} - r_m + z_m$ und die Summe der Faserdimensionen schließlich ist die von \mathcal{V}_p .

Endlich haben wir zu zeigen, daß die Projektion bei $r_{m-1} = r_m - z_m$ bijektiv ist: Die Umkehrabbildung ist $G \xrightarrow{\quad} G(1) \oplus \mathcal{O} \otimes Z_m$, da die Zusammensetzung mit der Projektion offenbar einmal id ergibt, und die andere Gleichung erschließen wir so: Wegen der Rangbedingung ist Y in der universellen Erweiterung $0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Y \rightarrow G(1) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z_m \rightarrow 0$ Null, also ist $F = G(1) \oplus \mathcal{O} \otimes Z_m$. qed.

Bemerkung zum Theorem: Vermutlich ist \mathcal{V}_p sogar lokaltriviales Faserbündel über \mathcal{V}_{Sp} , wir haben jedoch keine Verwendungsmöglichkeit dafür.

Die nächste Aussage ist ein kleiner Hinweis auf die Richtigkeit der Vermutung, daß Bündel vom festen Rang r auf \mathbb{P}_n für großes n in Geradenbündel zerfallen:

Folgerung:

1. Ein Vektorbündel auf \mathbb{P}_n vom Rang $r < n$ mit $H^1(F(m)) = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $0 < l < n-1$ zerfällt vollständig in Geradenbündel.

2. Ein polynomiales Bündel der Stufe m vom Rang $< n$ ohne triviale direkte Summanden in den nichttrivialen Ableitungen ist zu $\mathcal{O}(m)^r$ isomorph.

Beweis:

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, (1.5.3), das Bündel F sei polynomial. Wir machen Induktion nach der Stufe m und für $m = 0$ ist $F = \mathcal{O} \otimes Z_0$. Sei $m \geq 1$ und $0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes Y \rightarrow F_{-1}(1) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z \rightarrow 0$ die universelle Erweiterung von F , Nehmen wir an, Y sei $\neq 0$, und bilden wir die Fasersumme mit einem Element $\neq 0$ in $\text{Hom}(\mathcal{O} \otimes Y, \mathcal{O})$. Wir erhalten eine Erweiterung $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O} \otimes Z \rightarrow 0$. Nach dem dritten obigen Lemma muß direkter Summand von F' sein, da $\text{Rang } F$ sonst $\geq n$ wäre. Da aber die induzierte Abbildung $F_{-1}(1) \rightarrow F'$ surjektiv ist, gäbe es eine Surjektion $F_{-1}(1) \rightarrow \mathcal{O}$, Widerspruch. Daher ist $F = F_{-1}(1) \oplus \mathcal{O} \otimes Z$, also nach Induktionsvoraussetzung Summe von Geradenbündeln.

Die Aussage 2. ist ein Spezialfall von 1. (vgl. mit der Begriffsbildung in 5.3). qed.

5. Klassifikationsprobleme für Vektorbündel auf der projektiven Ebene

Wir wissen, daß jedes polynomiale Vektorbündel, also insbesondere jedes Vektorbündel auf der projektiven Ebene, zu einem Bündel in \mathcal{V}_p isomorph ist und jedes Bündel in \mathcal{V}_p ist polynomial. Die sich anschließende Frage ist die nach der Isomorphie zweier Bündel in \mathcal{V}_p . Da p eine Isomorphieinvariante ist, können zwei Bündel mit verschiedenen Polynomen nicht isomorph sein.

5.1 Da Bündel F in \mathcal{V}_p durch ihre Kroneckermoduln bestimmt sind, also nach Theorem 4.7 durch die letzten beiden Komponenten des zugehörigen $(m+1)$ -tupels (Y_0, \dots, Y_m) , sind zwei Bündel F und $F' \in \mathcal{V}_p$ genau dann isomorph, wenn ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \otimes (X_{m-1}/Y_{m-1}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(F)} & X_m/Y_m \\ \downarrow E \otimes a & & \downarrow b \\ E \otimes (X_{m-1}/Y'_{m-1}) & \xrightarrow{\mathcal{K}(F')} & X_m/Y'_m \end{array}$$

mit Isomorphismen a und b existiert. Wir dürfen annehmen, daß $X_m = E \otimes X_{m-1}$ ist, da die trivialen Anteile von F und F' gleich sind und also keine Rolle spielen. Fassen wir a als in $GL(X_{m-1})$ auf mit $a(Y_{m-1}) = Y'_{m-1}$. Dann ist das Diagramm schon durch a bestimmt: Wegen der Surjektivität von $\mathcal{K}(F)$ und $\mathcal{K}(F')$ mit Kernen $Y_m/(E \otimes Y_{m-1} + W_m)$ bzw. $Y'_m/(E \otimes Y'_{m-1} + W'_m)$ ist es Kokern des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} Y_m/(E \otimes Y_{m-1} + W_m) & \longrightarrow & E \otimes (X_{m-1}/Y_{m-1}) \\ \downarrow E \otimes a|_{Y_m} & & \downarrow E \otimes a \\ Y'_m/(E \otimes Y'_{m-1} + W'_m) & \longrightarrow & E \otimes (X_{m-1}/Y'_{m-1}). \end{array}$$

Wir gehen noch einen Schritt weiter: $F \in \mathcal{V}_p$ ist sogar durch die letzte Komponente Y_m bestimmt, da $F = \mathcal{U}(E \otimes X_{m-1} \rightarrow E \otimes X_{m-1}/Y_m)$ ist (hier wieder $X_m = E \otimes X_{m-1}$).

Die gerade gemachten Überlegungen zeigen, daß ein Isomorphismus zwischen F und $F' = \mathcal{U}(E \otimes X_{m-1} \rightarrow E \otimes X_{m-1}/Y'_m)$ durch ein Diagramm der folgenden Form mit $a \in GL(X_{m-1})$ gegeben ist:

$$\begin{array}{ccc} Y_m \subset E \otimes X_{m-1} \\ E \otimes a \downarrow & & \downarrow E \otimes a \\ Y'_m \subset E \otimes X_{m-1} \end{array}$$

Umgekehrt induziert jedes $a \in GL(X_{m-1})$ einen Isomorphismus von F auf ein polynomiales Bündel in \mathcal{V}_p . Wir haben unter Berücksichtigung von Theorem 4.7 bewiesen:

Lemma:

1. Die (offene und abgeschlossene) Projektion π von $Gr_{u_0}(X_0) \times \dots \times Gr_{u_m}(X_m)$ auf den letzten Faktor bestimmt ein Schema $\overline{\mathcal{V}}_p = \pi^{-1}(\mathcal{V}_p) \subset Gr_{u_m}(X_m)$, polynomialer Bündel mit Polynom $p = \sum (Y_i, z_i) T^{m-i}$. Das Vektorbündel zu einem Punkt $Y_m \in \overline{\mathcal{V}}_p$ ist $\mathcal{U}(E \otimes X_{m-1} \rightarrow X_m/Y_m)$ und jedes Bündel mit Polynom p ist zu einem solchen isomorph.
2. Auf $\overline{\mathcal{V}}_p$ operiert $a \in SL(X_{m-1})$ durch $E \otimes a \otimes id_{Z_m}$. Die Bahnen von $SL(X_{m-1})$ entsprechen den Isomorphieklassen polynomialer Bündel mit Polynom p .

Da die Skalare in $GL(X_{m-1})$ wie die Identität operieren, dürfen wir uns auf $SL(X_{m-1})$ beschränken, was wegen der Halbeinfachheit von $SL(X_{m-1})$ für das Folgende günstiger ist:

5.2. Über die entstehende Frage nach der Existenz von Quotienten nach Gruppenoperationen, hier $\overline{\mathcal{V}}_p/SL(X_{m-1})$, gibt das Standardwerk [Mumford, GIT] Auskunft: Er existiert im allgemeinen nicht. Jedoch gibt es eine offene invariante Menge, die Menge der stabilen Punkte, für die ein quasiprojektiver geometrischer Quotient [Mumf., GIT, Def. 0.6] existiert, d.h. wo die Punkte von $\overline{\mathcal{V}}_p/SL(X_{m-1})$ den Isomorphieklassen der Bündel mit Polynom p entsprechen.

Leider kann die Menge der stabilen Punkte auch leer sein. Sie hängt außerdem von einer gewählten Einbettung in ein Produkt von projektiven Räumen ab. Ihre Charakterisierung geschieht in [ebd., II, 1, Th. 2.1] für ein projektives Schema \mathcal{X} , auf dem die Gruppe G operiert. Wenn \mathcal{Y} offen (oder lokal abgeschlossen) in \mathcal{X} liegt mit G -invarianter Inklusion, sind nach [ebd., I, 5, Th. 1.18] die eigentlich-stabilen Punkte von \mathcal{X} (d.h. stabil mit endlichem Stabilisator), die in \mathcal{Y} liegen, enthalten in denen von \mathcal{Y} .

Bezeichnung:

Wenn $i: \mathcal{X} \xrightarrow{\text{inj}} \mathbb{P}(V_1) \times \dots \times \mathbb{P}(V_m)$ eine G -Äquivalente Einbettung in ein Produkt projektiver Räume ist, so daß $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_j)}(1)$ linearisiert ist, d.h. daß G auf den affinen Kegeln $A(V_j)$ über $\mathbb{P}(V_j)$ operiert, wollen wir die eigentlich stabilen Punkte in \mathcal{X} , die in \mathcal{Y} liegen, besonders stabil (bez. i) nennen.

Ein (bez. der natürlichen Einbettung) besonders stabiles polynomiales Vektorbündel mit Polynom p ist ein Bündel, das durch einen Punkt in $\overline{\mathcal{F}}_p \subset \text{Gr}_{u_m}(E \otimes X_{m-1})$ ($z_m = 0$) induziert wird, der bezüglich der durch die Plückerkoordinaten gegebenen Einbettungen $\text{Gr}_{u_m}(E \otimes X_{m-1}) \subset \mathbb{P}(\wedge^{u_m}(E \otimes X_{m-1}))$ eigentlich stabil ist. Die Gruppenoperation wird in Lemma 5.1 beschrieben. Wir haben folgendes Stabilitätskriterium:

Lemma:

Sei X ein Vektorraum der Dimension d , $\text{Gr}_k(E \otimes X) \subset \mathbb{P}(\wedge^k(E \otimes X))$ die natürliche Einbettung. $Y \in \text{Gr}_k(E \otimes X)$ ist besonders stabil relativ der Operation von $SL(X)$ genau dann, wenn für alle echten Unterräume Z von X

$$\frac{\dim(Y \cap E \otimes Z)}{\dim Z} < \frac{\dim Y}{\dim X} \quad \text{gilt.}$$

Beweis:

Wir folgen [Mumf., GIT, 4, § 4], wählen eine Basis x_1, \dots, x_d von X und e_0, \dots, e_n sei die fest gewählte Basis von E . Wir definieren Unterräume $Z_j^i \subset E \otimes X$ durch das Verschwinden der Koeffizienten bei $e_p \otimes x_q$ für $q > j$ und alle

p und bei $q = j$ für $p > i$. Dann erhalten wir eine Fahne $E \otimes X = Z_d^n \supset Z_d^{n-1} \supset \dots \supset Z_d^0 \supset Z_{d-1}^n \supset \dots \supset Z_1^0 \supset Z_0^n = 0$, so daß wir für die Paare (i, j) , für die $(*) \dim(Y \wedge Z_j^{i-1}) = \dim(Y \wedge Z_j^{i-1}) + 1$ gilt, Elemente $y_j^i \in Z_j^i \setminus Z_j^{i-1}$ wählen können, die eine Basis von Y bilden ($Z_j^{-1} := Z_{j-1}^n$).

Um das Stabilitätskriterium anwenden zu können [GIT, Th. 2.1], wählen wir eine relativ x_1, \dots, x_d diagonale Einparametergruppe λ in $SL(X)$, die durch die Charaktere $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{Z}$ gegeben ist, für die $c_1 > c_2 > \dots > c_d$ gelte, und betrachten die Bahn von Y unter λ . Es gilt, die Spezialisierung bei $t \rightarrow 0$ zu berechnen. Das Konjugierte von $Ky_j^i = k(\sum_{p < q} a_{pq} e_p \otimes x_q + \sum_{p > q} a_{pj} e_p \otimes x_j)$ unter $\lambda(t)$ ist $k(\sum_{p < q} a_{pq} t^{c_q} e_p \otimes x_q + \sum_{p > j} a_{pj} t^{c_j} e_p \otimes x_j) = k(\sum_{p < q} a_{pq} t^{c_1} e_p \otimes x_q + \sum_{p > j} a_{pj} e_p \otimes x_j)$ und spezialisiert also zu $k \cdot \sum_{p > j} a_{pj} e_p \otimes x_j$. Wegen der Wahl der y_j^i sind alle diese Elemente linear unabhängig, spannen also die Spezialisierung Y_0 von Y unter λ bei $t \rightarrow 0$ auf.

$\wedge^k Y_0$ ist ein Fixelement für die Operation von auf $Gr_k(E \otimes X) \subset P(\wedge^k(E \otimes X_0))^*$, und somit läßt sich der Charakter auf der Faser von $\mathcal{O}(1)$ über $\wedge^k Y_0$, das ist $(\wedge^k Y_0)^*$, berechnen. Dieser ist aber $-\sum_{p > q} k_j \cdot c_j$, da die Operation durch die kontragrediente erfolgt, wobei wir mit k_j die Anzahl der Paare (p, j) mit $(*)$ bezeichnen. k_j läßt sich auch als $\dim(Y \wedge Z_j^n) - \dim(Y \wedge Z_{j-1}^n)$ ausdrücken, so daß $-\sum k_j c_j = -\dim Y \cdot c_d + \sum_{j=1}^{d-1} \dim(Y \wedge Z_j^n)(c_{j+1} - c_j)$ ist. Nach [GIT, prop. 2.14] gilt diese Formel auch für durch $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_d$ definierte Einparametergruppen.

Nach dem Stabilitätskriterium [GIT, Th. 2.1] ist Y also eigentlich stabil, wenn dieser Charakter positiv ist für jede Basis x_1, \dots, x_d und für alle c_1, \dots, c_d mit $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_d$ und $\sum c_i = 0$, da jede Einparametergruppe bezüglich einer Basis Diagonalgestalt hat. Wegen

der Linearität der Formel in c_1, \dots, c_d ist das genau dann der Fall, wenn dies für alle p und $d-p = c_1 = \dots = c_p$, $c_{p+1} = \dots = c_d = -p$ gilt. Daher ist obiger Charakter genau dann positiv, wenn für alle $p \in \{1, \dots, d-1\}$ $\dim Y \cdot p > d \cdot \dim(Y \wedge Z_p^n)$ ist. Nach Definition, und da die Basis von X beliebig war, ist Z_p^n ein Unterraum der Dimension p von der Form $E \otimes Z$ und beliebigen $o = Z \not\subset X$, so daß die Ungleichung die gewünschte Gestalt annimmt. ged.

5.3 Das Lemma 5.2 ist unmittelbar auf unsere Vektorbündelsituation anwendbar. Darauf müßte eigentlich eine geometrische Interpretation der Bedeutung der Unterräume Z folgen. Die jedoch dabei auftretenden Schwierigkeiten hängen damit zusammen, daß wir durch die Beschränkung auf den letzten Faktor von V_p (Lemma 5.1.1) von der expliziten Struktur, die durch die Ableitungen des Bündels gegeben ist, abgesehen haben. Die Operation von $SL(X_{m-1})$, stabilisiert für $m > 1$ in der Tat auch nicht die $X_j = \sum_{i=0}^j E^{\otimes i} \otimes Z_{j-1}$, die für $j < m-1$ in X_{m-1} enthalten sind, und der Stabilisator wäre keine reduktive Gruppe, so daß man die Mumfordschen Stabilitätskriterien nicht anwenden kann.

Für $m = 1$ entstehen jedoch keine Probleme, weil weil alle $Z_j = o$ sind für $j > 0$. Im Falle $m \geq 1$, aber $Z_j = o$ für alle $j > 0$ ist das Polynom $p \in Z^2[T]$ Summe des Polynoms $\sum_{i=1}^m y_i T^{m-1}$ in der ersten Komponente und des Monoms $z_0 T^m$ in der zweiten. Vektorbündel mit solchem Polynom erweisen sich als der angesprochenen geometrischen Interpretation zugänglich.

Definition:

Ein polynomiales Vektorbündel heißt monomial, wenn die zweite Komponente seines Polynoms $p \in Z^2[T]$ ein Monom ist, d.h. $z_1 = 0$ für $1 > 0$ (Def. 4.3.3).

Das Polynom eines monomialen Bündels F ist also allein durch die Ränge $r_{m-k} = z_0 - \sum_{i=1}^{m-k} y_i$ der k -ten Ableitungen von F eindeutig bestimmt: $p = \sum_{i=0}^{m-1} (r_{m-1-k} - r_{m-i}) T^i \otimes r_0 \cdot T^m \in Z^2[T]$.

Umgekehrt bestimmt das Polynom genau die r_{m-k} .
Wir bezeichnen in diesem Falle das Schema \mathcal{V}_p auch mit $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m}$. Die X_j sind gleich $E^{\otimes j} \otimes X_0$ für alle j .

Die j -te universelle Erweiterung eines monomialen Bündels ist $0 \rightarrow 0 \otimes Y_{-j} \rightarrow F_{-j-1}(1) \rightarrow F_{-j} \rightarrow 0$. Daher induziert ein Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} F'$ monomialer Bündel für alle j einen Isomorphismus $F_{-j} \xrightarrow{\sim} F'_{-j}$, so daß das Diagramm

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} 0 \otimes Y_{-j} & \rightarrow & F_{-j-1}(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \otimes Y'_{-j} & \rightarrow & F'_{-j-1}(1) \end{array}$$

kommutiert. Da $F_{-m} = F'_{-m} = 0 \otimes X_0$ ist, induziert α einen Automorphismus $a \in GL(X_0)$ mit $aY_1 = Y'_1$, der im Falle der monomialen Bündel wiederum α bestimmt, und zwar durch $E^{\otimes m} \otimes a$ mit $(E^{\otimes m} \otimes a)(Y_m) = Y'_m$. Dies läßt sich mit Hilfe des Diagramms $(*)$ als solches von Kroneckermoduln leicht induktiv beweisen. Daher erhalten wir dem Lemma 5.1 entsprechend das

Lemma:

1. Die Projektion π von $Gr_{U_m}(X_0) \times Gr_{U_m}(E \otimes X_0) \times \dots \times Gr_{U_m}(E^{\otimes m} \otimes X_0)$ auf den letzten Faktor bestimmt ein Schema $\mathcal{V}_p^{r_0, \dots, r_m} = \pi(\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m}) \subset Gr_{U_m}(E^{\otimes m} \otimes X_0)$ monomialer Bündel mit Polynom $\sum_{i=0}^m (r_{m-1-i} - r_{m-1}) \cdot T^i \otimes r_0 \cdot T^m$. Das Vektorbündel zu einem Punkt $Y_m \in \mathcal{V}_p^{r_0, \dots, r_m}$ ist $F = \mathcal{U}(E^{\otimes m-1} \otimes X_0 \rightarrow (E^{\otimes m} \otimes X_0)/Y_m)$ und jedes monomiale Bündel mit Polynom p ist zu einem solchen isomorph.

2. Auf $\mathcal{V}_p^{r_0, \dots, r_m}$ operiert $a \in SL(X_0)$ durch $E^{\otimes m} \otimes a$. Die Bahnen von $SL(X_0)$ entsprechen den Isomorphieklassen monomialer Bündel mit Polynom p . (Bezeichnungen: Th. 4.7)

5.4 Bevor wir das Stabilitätskriterium 5.2 auf diese Situation anwenden, wollen wir die Unterräume $Z \subset X_0$ geometrisch deuten:

Lemma:

Sei F ein monomiales Vektorbündel der Stufe m , das durch

$(Y_0, \dots, Y_m) \in \mathcal{V}^{E^{\otimes m} \otimes Z}$ repräsentiert werde. Sei $G \rightarrow F$ ein Monomorphismus in Mod und G monomiales Bündel der Stufe m . Dann wird G von $(Y_0 \cap Z, Y_1 \cap E \otimes Z, \dots, Y_m \cap E^{\otimes m} \otimes Z)$ repräsentiert, wobei $Z = \Gamma(G(-m))$ als Unterraum von $\Gamma(F(-m)) = X_0$ aufgefaßt wird, und i ist dadurch eindeutig bestimmt. Umgekehrt induziert $Z \subset X_0$ eindeutig ein monomiales Bündel G und einen Monomorphismus $G \rightarrow F$.

Beweis:

Wir bemerken zunächst, daß für F und G in Mod_0 die Klasse der Monomorphismen bez. Mod_0 dieselbe ist wie die bez. Mod . Letztere sind nach 0.4 die Garbeninjektionen (d.h. halmweise injektiv), und da Moduln, die nur einen Halm $\neq 0$ haben, offenbar in Mod_0 liegen, sind nicht halmweise injektive Homomorphismen keine Monomorphismen in Mod_0 .

Offensichtlich ist $\mathcal{K}(i(m))$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ein Monomorphismus in Kron_0 , da $\Gamma(i(m))$ und $\Gamma(i(m-1))$ injektiv sind. Daher ist auch $\mathcal{M}(\mathcal{K}(i(-1))) = : i_{-1} : G_{-1} \rightarrow F_{-1}$ ein Monomorphismus in Mod_0 , also in Mod . Wir beweisen die Behauptung nun durch Induktion nach m : Der Anfang ist klar, da ein polynomiales Bündel der Stufe 0 ein triviales Bündel ist. Sei $i : G \rightarrow F$ gegeben und $m \geq 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist G_{-1} monomial der Stufe $m-1$ und wird durch $(Y_0 \cap Z, Y_1 \cap E \otimes Z, \dots, Y_{m-1} \cap E^{\otimes m-1} \otimes Z)$ repräsentiert mit $Z = \Gamma(G_{-1}(-m+1)) = \Gamma(G(-m)) \subset \Gamma(F_{-1}(-m+1)) = \Gamma(F(-m)) = X_0$ und i_{-1} ist dadurch eindeutig bestimmt.

Wir haben ein kommutatives Diagramm von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes \bar{V} & \rightarrow & G_{-1}(1) & \rightarrow & G & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow i_{-1}(1) & & \downarrow i & & \\ 0 \rightarrow \mathcal{O} \otimes \bar{Y}_m & \rightarrow & F_{-1}(1) & \rightarrow & F & \rightarrow & 0 \end{array}$$

. Wenn wir die entsprechenden Kroneckermoduln betrachten, ist es klar, daß das Faserprodukt von $i_{-1}(1)$ mit $\mathcal{O} \otimes \bar{Y}_{m-1} \rightarrow F_{-1}(1)$ trivial, also $= \mathcal{O} \otimes \bar{V}$ sein muß. Nehmen wir die Schnitte, so erhalten wir die Gleichung $\bar{V} = Y_m \cap E^{\otimes m} \otimes Z / (E \otimes (Y_{m-1} \cap E^{\otimes m-1} \otimes X_0) + W_m^Z)$

in $E^{\otimes m} \otimes X_0$ modulo $E \otimes Y_{m-1} + W_m^X$. Dabei sind $\bar{Y}_m = Y_m / (E \otimes Y_{m-1} + W_m^X)$ und $\bar{V} = V / (Y_{m-1} \cap E^{\otimes m-1} \otimes Z + W_m^Z)$ mit $W_m^X = \text{Kern}(E^{\otimes m} \otimes X_0 \rightarrow S^m(E) \otimes X_0)$ und W_m^Z entsprechend, wodurch \bar{V} eindeutig bestimmt ist. Wenn wir $V = Y_m \cap E^{\otimes m} \otimes Z$ wählen, ist diese Gleichung erfüllt und daher ist G durch $(Y_0 \cap Z, \dots, Y_m \cap E^{\otimes m} \otimes Z)$ und schließlich i durch $Z \subset X_0$ bestimmt.

Umgekehrt sei $m > 0$ und betrachten wir $(\check{Y}_0, \check{Y}_1, \dots, \check{Y}_m) = (Y_0 \cap Z, Y_1 \cap E \otimes Z, \dots, Y_m \cap E^{\otimes m} \otimes Z)$ und nehmen wir an, die ersten m Komponenten induzierten ein Bündel $G_{(-1)}$ und einen Monomorphismus $i_{(-1)}: G_{(-1)} \rightarrow F_{(-1)}$. Mit Hilfe der Kroneckermoduln zeigt man, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \otimes \bar{Y}_m & \longrightarrow & F_{(-1)}(1) \\ (*) \cup & & \uparrow i_{(-1)}(1) \\ \mathcal{O} \otimes \check{Y}_m & \longrightarrow & G_{(-1)}(1) \end{array} \quad \text{kommütativ ist (mit Bezeichnungen entsprechend den obigen).}$$

Dabei ist $\check{Y}_m \hookrightarrow \bar{Y}_m$ tatsächlich injektiv, weil $E \otimes (Y_{m-1} \cap E^{\otimes m-1} \otimes Z) = E \otimes Y_{m-1} \cap E^{\otimes m} \otimes Z$ ist, also auch Gleichheit modulo W_m^X gilt.

Da j eine faserweise Injektion ist, muß es auch j' sein, so daß der Kokern von j' ein Vektorbündel G in ist, das die Ableitung $G_{-1} = G_{(-1)}$ besitzt. Wie oben zeigen wir, daß $\mathcal{X}(1)$, also auch der induzierte Homomorphismus $i: F \rightarrow G$ ein Monomorphismus ist. ged.

Wenn wir nun Lemma 5.2 auf die in Lemma 5.3 ausgesprochene Situation, also $SL(X_0)$ statt $SL(X_{m-1})$ und $X_{m-1} = E^{\otimes m-1} \otimes X_0$ anwenden, erhalten wir mit dem eben Bewiesenen die folgende Aussage. Dabei müssen wir nur bedenken, daß $\dim X_0 = r_0$ und $\dim Y_m = u_m = \dim W_m +$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} Y_{m-k} \text{ gilt (Bez. 4.5). Dabei ist } Y_{m-k} = r_{m-k-1} - r_{m-k}, \text{ so daß sich } \dim Y_m = \mu \cdot r_0 + \sum_{k=1}^m \binom{n-1+k}{n-1} r_{m-k} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} r_{m-k} = \mu \cdot r_0 + \binom{n+m-1}{n} r_0 - \sum_{k=1}^m \binom{n-1+k}{n-1} r_{m-k} - r_m \text{ ergibt mit } \mu = \dim \text{kern}(E^{\otimes m} \rightarrow S^m(E)).$$

Folgerung:

Ein monomiales Vektorbündel F in $\mathcal{V}_0^{r_0, \dots, r_m}$ ist genau dann besonders stabil (im Sinne von Bez. 5.2), wenn für jeden Monomorphismus $G \rightarrow F$ eines monomialen Bündels $G \neq F$ in $\mathcal{V}_0^{r_0, \dots, r_m}$ die Formel $\frac{\sum_{k=0}^{m-1} (n-1+k) \cdot s_{m-k}}{s_0} > \frac{\sum_{k=0}^{m-1} (n-1+k) \cdot r_{m-k}}{r_0}$ gilt.

5.5 Wenn besonders stabile Bündel $\mathcal{V}_{0s}^{r_0, \dots, r_m} \subset \mathcal{V}_0^{r_0, \dots, r_m}$ existieren, bilden sie eine offene dichte Menge. Da die Punkte von $\mathcal{V}_{0s}^{r_0, \dots, r_m} / SL(X_0)$ den Isomorphieklassen besonders stabiler monomialer Bündel entsprechen, ebenso wie den Bahnen von $SL(X_0)$ auf $\mathcal{V}_0^{r_0, \dots, r_m}$, ist die Dimension $\mathcal{V}_{0s}^{r_0, \dots, r_m} / SL(X_0)$ gleich $\dim \mathcal{V}_0^{r_0, \dots, r_m} - \dim SL(X_0)$. Nach Theorem 4.7 (beachte auch den Ausdruck für u_j in 4.5) ist dies gleich $\sum_{j=1}^m y_j (\dim E^{\otimes j} \otimes X_0 - u_j) - r_0^2 + 1 = \sum_{j=1}^m y_j \cdot (\dim S^j(E) \otimes X_0) - \sum_{j=0}^m \binom{n-1}{j} y_{j-1} - r_0^2 + 1 = \sum_{j=1}^m (r_{j-1} - r_j) \sum_{i=0}^{j-1} \binom{n-1+i}{n-1}$. $r_{j-1} - r_0 + 1$, wie oben berechnet. Schließlich ergibt sich

Lemma:

Die Dimension des Modulischemas für besonders stabile monomiale Vektorbündel in $\mathcal{V}_0^{r_0, \dots, r_m}$ ist

$$\sum_{j=1}^m r_{j-1} \cdot \sum_{i=0}^{j-1} \binom{n-2+i}{n-2} \cdot r_{j-1} - r_m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1+i}{n-1} \cdot r_{m-1} + 1, \text{ falls es existiert. } (m > 0)$$

5.6 Wenn wir das Stabilitätskriterium, Folgerung 5.4, für \mathbb{P}_2 , also $n = 2$ hinschreiben, lautet die Formel

$$(*) \quad \frac{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k) \cdot s_k}{s_0} > \frac{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k) \cdot r_k}{r_0}$$

Im Falle der Stufe 1 ergibt sich $\frac{s_1}{s_0} > \frac{r_1}{r_0}$. Die universelle Erweiterung eines monomialen Bündels der Stufe 1 ist $0 \rightarrow 0 \otimes Y_1 \rightarrow \mathcal{O}(1) \otimes X_0 \rightarrow F \rightarrow 0$, woraus wir $c_1(F) = \dim X_0 = r_0$ erschließen, wenn $c_1(F)$ den Grad von F bezeichnet (Bem. 4.2), der mit der ersten Chernklasse $\in \mathbb{Z}$ übereinstimmt. Die Ungleichung wandelt sich nun in die bekannte Form $(**) \quad \frac{c_1(E)}{r(E)} < \frac{c_1(F)}{r(F)}$ mit $\text{Rang } F = r(F)$ und

entsprechend für G , allerdings genügen nur monomiale Unterbündel G der Stufe 1 von F .

Berechnen wir jetzt die erste und zweite Chernklasse $c_1(F)$ und $c_2(F)$ eines Vektorbündels in $\mathbb{V}_0^{r_1, r_2}$.
Wir wissen, daß sie alle polynomial sind:

Lemma:

Sei F ein Vektorbündel auf P_2 in $\mathbb{V}_0^{r_1, r_2}$ der Stufe n .
Dann ist $c_1(F) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i$ und $c_2(F) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{r_i(r_i-1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (r_j-1) \sum_{j=0}^{j-1} r_j$, wobei $r_1 = \text{Rang } F_{-m+1}$ ist.

Beweis:

Sei $0 \rightarrow 0 \otimes Y \rightarrow F_{-1}(1) \rightarrow F \rightarrow 0 \otimes Z \rightarrow 0$ seine universelle Erweiterung. Wegen der Additivität der totalen Chernklasse und weil sie auf 0^F gleich 1 ist, gilt $c_2(F) = c_2(F_{-1}(1))$. Nach [Hirzebruch, I, 4, Th. 4.4.3, III] gilt daher $c_2(F) = c_2(F_{-1}) + (r_{-1}-1)c_1(F_{-1}) + \frac{r_{-1}(r_{-1}-1)}{2}$, wenn wir mit r_{-1} den Rang von F_{-1} bezeichnen. Wegen der Additivität der ersten Chernklasse gilt auch $c_1(F) = c_1(F_{-1}(1)) = c_1(F_{-1}) + r_{-1}$, woraus wir per Induktion mit den üblichen Bezeichnungen auf die angegebenen Formeln schließen. qed.

Folgerung:

1. Ein monomiales Vektorbündel F in $\mathbb{V}_0^{r_0, \dots, r_m}$ auf P_2 ist besonders stabil, wenn für jeden Monomorphismus $G \rightarrow F$ eines monomialen Bündels $G \rightarrow F$ in $\mathbb{V}_0^{s_0, \dots, s_m}$ die Ungleichung

$$\frac{\sum_{i=1}^m (c_i + r_i)}{r_0} < \frac{\sum_{i=0}^m (d_i + s_i)}{s_0} \quad \text{gilt.}$$

Dabei ist c_i der Grad der $(m-1)$ -ten Ableitung von F , entsprechend d_i für G . (5.6)

2. Monomiale Bündel F der Stufe 1 bzw. 2 sind besonders stabil, wenn für jeden Monomorphismus $G \rightarrow F$ die Ungleichungen (i) $\frac{d_1}{s_1} < \frac{c_1}{r_1}$ bzw. (ii) $\frac{d_1}{s_1} < \frac{c_1}{r_1}$ und $\frac{d_2}{s_2} < \frac{c_2}{r_2}$ gelten. (G = monomiales Bündel der Stufe 1 bzw. 2)

Beweis:

Wir ersetzen $\sum_{k=0}^{i-1} r_k$ bzw. $\sum_{k=0}^{i-1} s_k$ in obiger Formel durch c_i und d_i (Lemma 5.6). Dann ist die Aussage 1 genau Folgerung 5.4 für $n = 2$. Aussage 2 für Bündel der

Stufe 1 haben wir eben nachgewiesen. Für Stufe 2 müssen wir die Ungleichung $\frac{c_1 + c_2 + r_1 + r_2}{r_0} < \frac{d_1 + d_2 + s_1 + s_2}{s_0}$

aus den vorausgesetzten Ungleichungen herleiten. Es ist $c_1 = r_0$, $d_1 = s_0$, $c_2 = r_0 + r_1$ und $d_2 = s_0 + s_1$, so daß wir aus $\frac{d_1}{s_1} < \frac{c_1}{r_1}$ auf $\frac{c_2}{c_1} < \frac{d_2}{d_1}$ schließen. Schätzen wir ab:

$$\frac{c_1 + c_2 + r_1 + r_2}{r_0} = 1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{r_1}{c_1} + \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{r_2}{c_2} < 1 + \frac{d_2}{d_1} + \frac{s_1}{d_1} + \frac{d_1}{d_1} \cdot \frac{s_2}{d_2} = \frac{d_1 + d_2 + s_1 + s_2}{s_0} \quad \text{ged.}$$

Nach [Marayuma, stable vb., Th.4.10] existiert ein Modulschema für "stabile" Vektorbündel F vom Rang 2 auf P_2 , in dem Sinne, daß F "stabil" ist genau dann, wenn $(x^*) \frac{c_1(F)}{r(F)} < \frac{c_2(F)}{r(F)}$ für alle echten Monomorphismen eines beliebigen (1) Bündels $G \rightarrow F$. Wir sehen daraus, daß (wenigstens der Form nach) die Bündel der Stufe 1 in diesem Sinne "stabil" sind. Dagegen ist ein "stabiles" Bündel der Stufe 2 erst dann notwendig besonders stabil, wenn auch seine erste Ableitung "stabil" ist (obige Folgerung, Punkt 2). In höheren Stufen sind die beiden Stabilitätsbegriffe kaum vergleichbar, wie auch eine Berechnung der Dimension der Modulischemata zeigt, falls sie existieren:

Nach Lemma 5.5 ist die Dimension für $n = 2$ gleich $d_2 = \sum_{k=0}^{m-1} r_k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} r_j - \sum_{k=0}^m r_m \cdot \sum_{j=0}^k r_j + 1$. Nach [Barth, stable vb.] ist die Dimension der Marayumaschen "stabilen" Vektorbündel vom Rang 2 auf P_2 mit erster Chernklasse $c_1 = 0$ und zweiter Chernklasse c_2 1 gleich $4c_2 - 3$.

Da die monomialen Bündel F vom Rang 2 nicht auf $c_1 = 0$ normiert sind, tensorieren wir sie mit $\mathcal{O}(-\frac{c_1(F)}{2})$. Dann ist $c_2(F(-\frac{c_1(F)}{2})) = c_2(F) - \frac{c_1(F)}{2} \cdot c_1(F) + (\frac{c_1(F)}{2})^2$, und wenn wir die Formeln von Lemma 5.6 hier einsetzen, erhalten wir für die Dimension des Marayumaschen Modulischemas mit unseren Zeichen $D_2 = 4c_2(F) - c_1(F) - 3 = 2 \sum_{i=0}^{m-1} r_i \cdot (r_1 - 1) + 4 \sum_{i=1}^{m-1} (r_1 - 1) \cdot \sum_{j=0}^{i-1} r_j - (\sum_{j=0}^{m-1} r_j)^2 - 3$. Bilden wir die Differenz $D_2 - d_2$ mit $r_m = 2$, so ergibt sich $\sum_{j=0}^{m-1} (r_1 - 2) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} r_j$, also Null für $m = 1$ oder $m = 2$ oder bei $r_1 = 2$ für $1 \geq 2$, positiv für $m \geq 3$ und $r_1 > 2$

für ein $1 > 2$. (Wir setzen $r_1 > 2$ voraus, eine Bedingung dafür, daß die Bündel in $\mathcal{V}^{r_1, \dots, r_n}$ nicht in Geradenbündel zerfallen.) (4.7)

Diese Überlegungen führen zu einer Strukturaussage für Bündel vom Rang 2 und der projektiven Ebene:

Satz:

1. Das (existierende, irreduzible) Modulschema für Isomorphie von Vektorbündeln vom Rang 2 auf \mathbb{P}_2 mit Endomorphismen = k, erster Chernklasse = 0 und zweiter Chernklasse von der Form $c_2(r,s) = \frac{r+s}{2} \left(\frac{r+s}{2} - 1 \right) - r$ für $r+s \equiv 0 \pmod{2}$ "besteht" im Falle $r=0$ und $s > 2$ generisch aus den Isomorphieklassen von Vektorbündeln $F(-\frac{s}{2})$, wo F monomiales Bündel der Stufe 1 mit erster Ableitung \mathcal{O}^s ist; im Falle $r \geq s > 2$ aus den Isomorphieklassen von Vektorbündeln $F(-\frac{r+s}{2})$, wo F monomiales Bündel der Stufe 2 in $\mathcal{V}_0^{r,s,2}$ ist, dessen erste Ableitung F_{-1} "stabil" ist, d.h. Eigenschaft (**) besitzt (s.o.), wenn überhaupt so ein Bündel existiert.

2. Das (existierende, irreduzible) Modulschema der Bündel auf \mathbb{P}_2 vom Rang 2 mit Endomorphismen = k, vom Grad = 0 und zweiter Chernklasse ≥ 1 , die nicht von der Form $c_2(r,s)$ mit obigen Bedingungen an r und s ist, "besteht" generisch aus Isomorphieklassen von nichtmonomialen Vektorbündeln.

Beweis:

Zur Existenz und Irreduzibilität siehe [Marayuma, stable vb., th.4.10] und [Barth, moduli of vb.]. Nach [Maray., stable vb., Appendix] ist "Stabilität" im Sinne von (**) für Bündel F vom Rang 2 äquivalent zu $\text{End } F = k$ und nach Folgerung 5.6.2 gilt in den Fällen der Stufe 1 oder 2, daß die Bündel auch besonders stabil sind (im zweiten Fall, wenn auch die Ableitung "stabil" ist). Daher existiert unter den im Satz gemachten Voraussetzungen ein Modulschema für besonders stabile Bündel, und wie wir gesehen haben, stimmt

seine Dimension mit der Dimension des Marayumaschen Schemas für auf $c_1 = 0$ normierte Bündel mit $c_2 = c_2(r,s)$ überein. Daher und wegen der Irreduzibilität beider (Th. 4,6) gilt Aussage 1.

Sonst ist das Modulschema für besonders stabile monomiale Bündel F von echt kleinerer Dimension als das für auf $c_1 = 0$ normierte Bündel mit $\text{End } F = k$, wenn sie nicht Verschiebungen $F(1)$ von Bündeln der Stufe 1 oder 2 sind, was beim Normieren ja keine Rolle spielt. Daher müssen die Punkte des Marayumaschen Schemas generisch aus den Isomorphieklassen nichtmonomialer normierter Vektorbündel bestehen. ged.

Die "Hälfte" der Zahlen c_2 hat nicht die Form $c_2(r,s)$, es kommen also beide Aussagen vor. Dies zeigt auch, daß die hier verwendeten Schemata von Vektorbündeln und der Stabilitätsbegriff sich stark vom Üblichen unterscheiden. Tatsächlich wird der Marayumasche von einer Kategorie von Bündeln F entwickelt, denen der Kroneckermodul $E \otimes H^1(F(-2)) \rightarrow H^1(F(-1))$ zugeordnet wird. [Barth, moduli of vb.].

5.7 Die Darstellung eines Vektorbündels in \mathcal{V}_k als Kroneckermodul macht, jedenfalls generisch, eine explizite Konstruktion des Modulschemas in günstigen Fällen möglich, d.h. die Angabe einer "Normalform" des Kroneckermoduls, die von "quasiprojektiven" Parametern abhängt. Dabei spielen die Bündel der Stufe 1 eine hervorragende Rolle; Ist für sie ein solches "Normalformenmodulschema" konstruiert, lassen sich daraus die Normalformen für Bündel höherer Stufe mit vorletzter Ableitung in leicht angeben und zwar mit Hilfe folgenden Lemmas:

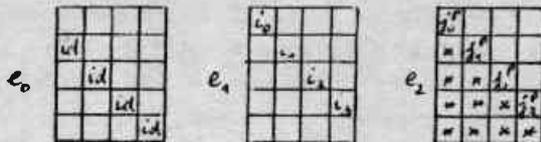
Lemma:

Sei e_0, \dots, e_n eine Basis von E , F ein polynom. Vektorbündel und $X = X(F)$ der Schnittmodul von F . Sehen wir

die durch e_0 gegebenen Injektionen $X_{-q-1} \rightarrow X_{-q}$ als Inklusion an, dann gibt es Komplemente \bar{X}_{-q} zu $X_{-q} \subset X_{-q+1}$ derart, daß die Matrizen von e_0, \dots, e_n als Abbildungen $X_{-1} \rightarrow X_0$ bezüglich der dadurch bestimmten Zerlegung von X_{-1} und X_0 folgende Gestalt haben:

hier im Bild:

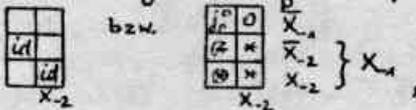
Stufe 4



In den nicht beschrifteten Kästchen stehen Nullen, Sterne bedeuten irgendetwas und i_q und j_q^p sind Injektionen. Wenn man die erste Zeile und Spalte streicht, erhält man die entsprechenden Matrizen für das abgeleitete Bündel und so fortfahrend die des m -ten abgeleiteten Bündels. Die n -tupel (i_q, j_q^p) definieren einen Kroneckermodul $E/E_0 \otimes \bar{X}_{-q-1} \rightarrow \bar{X}_{-q}$, der zur Einschränkung von $E \otimes X_{-q-1} \rightarrow X_{-q}$ modulo $E_0 = ke_0$ isomorph ist.

Beweis:

Wir machen Induktionen nach der Stufe von F . Nehmen wir also an, der Kroneckermodul $E \otimes X_{-2} \rightarrow X_{-1}$ von F_{-1} habe die beschriebenen Eigenschaften, und wählen wir eine solche Zerlegung von X_{-1} . Da $\mathcal{X}(F) = E \otimes X_{-1} \rightarrow X_0$ torsionsfrei ist, können wir $e_0 : X_{-1} \rightarrow X_0$ als Inklusion ansehen. Wählen wir ein Komplement \bar{X}_{-1} zu X_{-1} in X_0 , so haben die Matrizen von e_0 bzw. e_p für $p > 0$ die Form



da die $e_p|_{X_{-2}}$ offenbar durch X_{-1} faktorisieren.

Nach Satz 3.5 ist der Kroneckermodul des auf $P(E/E_0)$ eingeschränkten Bündels offensichtlich isomorph zu dem durch die Abbildungen i_0 und j_0^p für $p > 1$ gegebenen Kroneckermodul über E/E_0 . Daher sind diese Abbildungen alle injektiv, weswegen wir insbesondere das Kom-

plement X_{-1} auch so wählen können, daß in der zu e_1 gehörigen Matrix die Elemente \otimes verschwinden. Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich die Behauptung des Lemmas. ged.

Das Lemma besagt, daß der Kroneckermodul eines Bündels der Stufe 1 zu einem Kroneckermodul $E \otimes X \xrightarrow{\alpha} \bar{X} \otimes X$ isomorph ist, wo die Multiplikation mit e_0 durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \\ & a \end{pmatrix}$, die von e_1 durch $\begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix}$ und von e_2 durch $\begin{pmatrix} I & \\ & J \end{pmatrix}$ gegeben ist, wobei I und J zusammen eine Injektion bilden. Der Normalisator eines Kroneckermoduls dieser Form hat die Gestalt $\begin{pmatrix} a & \gamma & 0 \\ \gamma & b & 0 \\ \delta & 0 & b \end{pmatrix}$ auf $X_0 = \bar{X} \otimes X \otimes X$, d.h. b operiert auf X , und dabei sind $a \in GL(\bar{X})$, $b \in GL(X)$ und $\gamma, \delta \in \text{Hom}(\bar{X}, X)$. Die Restriktion auf die projektive Gerade $\mathbb{P}(E/k_{e_0})$ ist nach 1.5 zu einer direkten Summe von Geradenbündeln isomorph, und wir wollen die Bündel der Stufe 1 betrachten, die auf dieser Grade homogen zerfallen:

Bezeichnung: $\mathcal{N}_d^{r_0, r_1} \subset \mathcal{N}^{r_0, r_1} \subset \text{Gr}_{k_0 - r_1}^{r_0}(E \otimes X)$ sei die Menge der Vektorbündel, deren Einschränkung auf $\mathbb{P}(E/k_{e_0})$ zu $\mathcal{O}(d)^{r_1}$ isomorph ist, $d > 1$ geeignet.

Im allgemeinen ist $\mathcal{N}_d^{r_0, r_1}$ leer, da der Grad $c = r_0 = dr_1$ sein muß, d.h. d teilt r_0 , und $d \geq 1$ ist durch r_0 und r_1 festgelegt. Wenn $d = 1$ ist, gilt $r_0 = r_1$ und die Vektorbündel sind zu $\mathcal{O}(1)^F$ isomorph. Daher setzen wir $d > 1$ voraus. $\mathcal{N}_d^{r_0, r_1}$ ist offen in \mathcal{N}^{r_0, r_1} , denn betrachten wir die Paare (F, g) , wo g die Einschränkung $F|_{\mathbb{P}(E/E_0)}$ normalisiert, dann bilden sie ein Unterschema mit Faser $\text{Aut}(F|_{\mathbb{P}(E/E_0)})$ über F . Die Menge der F , wo $\dim \text{Aut}(F|_{\mathbb{P}(E/E_0)})$ minimal ist, ist offen und sie besteht gerade aus den homogen zerfallenden Bündeln. $(E_0 = k \cdot e_0)$

Für $\mathcal{V}_d^{r_0, r_1}$ wollen wir nun generisch einen Quotienten angeben. Die Normalform des Kroneckermoduls eines Bündels in $\mathcal{V}_d^{r_0, r_1}$ haben wir oben aufgestellt. Wenn das Bündel in $\mathcal{V}_d^{r_0, r_1}$ liegt, muß die durch die Matrizen

$\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} I_d \\ & 0 \end{pmatrix} : E/E_0 \otimes X \rightarrow \bar{X} \otimes X$ gegebene Restriktion des Kroneckermoduls zu $\mathcal{K}(\mathcal{O}(d))$ isomorph sein mit $\mathcal{K}(\mathcal{O}(d)) : k^d \rightarrow k^{d+1}$, $e_0 \cong$ Bijektion auf die ersten d , $e_1 \cong$ Bijektion auf die letzten d Faktoren von k^{d+1}

(vgl. 2.3). Legen wir in X und \bar{X} eine geeignete Basis fest, so läßt sich offenbar durch Wahl von a, b, γ jeder Kroneckermodul eines Vektorbündels in $\mathcal{V}_d^{r_0, r_1}$ auf \mathcal{K} (*
 oben transformieren, wobei dann aber J eine Blockmatrix aus $\frac{r_0}{d} = r_1$ ($d \times d$)-Matrizen ist, die bis auf die Diagonalblöcke verschwinden, welche alle nilpotente Jordanmatrizen sind. I ist eine $(r_1 \times r_0)$ -Matrix, Summe $\boxed{J_1 \dots J_{r_1}}$ von $r_1 \times d$ -Matrizen, deren i -te eine 1 in der i -ten Zeile der ersten Spalte besitzt und sonst nur Nullen. Und schließlich sind die Spalten von K mit Nummern $\equiv 1 \pmod{d}$ Null.

I und J lassen sich durch Isomorphismen der eingeschränkten Kroneckermoduln, K durch die durch \mathcal{S} bestimmte additive Gruppe auf diese Form bringen.

Der Normalisator dieser Matrizen ist zu $\text{Aut}(F(P(E/E_0)) = GL_{r_1}(k)$ isomorph und zwar durch $GL_{r_1}(k) \rightarrow \text{Aut}(E \otimes X \rightarrow \bar{X} \otimes X \otimes X)$
 $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

wobei b eine Blockmatrix ist, die aus $(d \times d)$ -Skalarmatrizen mit Skalar a_{ij} als Block der i -ten Horizontale und j -ten Vertikale zusammengesetzt ist. b ist eindeutig bestimmt durch $b \cdot I + bK = K' \cdot b$, wobei K' eine zweite Matrix mit Nullspalten der Nummer $\equiv 1 \pmod{d}$ ist. Da $\mathcal{V}_d^{r_0, r_1}$ offen in $\text{Gr}(E \otimes X)$ ist, sind es auch die $(r_1 \times r_1)$ -Matrizen mit d Nullspalten, die über die beschriebene Konstruktion Vektorbündel induzieren, in der Menge aller " d -Nullspaltenmatrizen". Wählen wir eine $d \times d$ -Untermatrix \mathcal{K} von K (wir nennen sie Gittermatrix), deren Elemente \mathcal{K}_{ij} jeweils im (ij) -ten Kästchen von K , aber nicht in den "desig-

nierten" Nullspalten liegen, z.B. in den rechten oberen Ecken (Veranschaulichung: Bild 1), dann ist die Menge der Matrizen K , deren Gittermatrizen paarweise verschiedene Eigenwerte haben, offen und nicht leer, schneidet also die Menge der Matrizen K , die Bündel induzieren, in einer offenen und nicht leeren Menge.

Lassen wir $GL_{F_d}(k)$ operieren, dann können wir die Gittermatrix jeweils auf Diagonalgestalt transformieren, und im Normalisator dieser Form sind die Diagonalmatrizen D von $GL_{F_d}(k)$ enthalten. Betrachten wir nun den affinen Raum der Matrizen K mit Nullspalten der Nummern $\equiv 1 \pmod d$ und diagonalen Gittermatrix, auf dem D operiert. Wählen wir eine offene Menge z.B. durch die Forderung, daß alle Zahlen direkt unter den Nebendiagonalelementen der Gittermatrix nicht Null seien (durch \times in Bild 1 angedeutet), dann haben wir wiederum eine offene invariante Menge in den Vektorbündel induzierenden Matrizen K festgelegt, die nicht leer ist, wenn $\mathcal{A}_d^{F_d, F_d}$ es nicht ist.

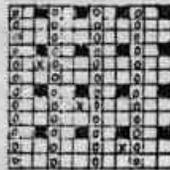


Bild 1

Die so (durch \times in Bild 1) bestimmten Elemente machen wir durch Operation von D alle zu 1 und die Stellung dieser Elemente hat zur Folge, daß die Vertauschungsmatrizen der Weylgruppe von $GL_{F_d}(k)$, die ja als semidirektes Produkt mit D den Normalisator der Diagonalmatrizen mit verschiedenen Eigenwerten bilden, die Form der so normierten Matrizen i.a. nicht invariant lassen. Das können wir z.B. erreichen, indem wir nur die offene Menge dieser Matrizen betrachten, wo die Zahl unter jedem Gittermatrixelement außer den angekreuzten unter der Nebendiagonale $\neq 1$ ist. Der Normalisator des gesamten Kroneckermoduls bzw. der der ihn repräsentierenden Matrix K in der beschriebenen Normalform in $GL_F(k)$ ist dann G_m , und wir haben gezeigt:

Lemma:

Falls Vektorbündel der Stufe 1 in $\mathcal{V}_d^{\mathbb{P}^2}$ vom Rang r existieren, deren Einschränkung auf die projektive Gerade $\mathbb{P}(k^3/k(1,0,0))$ zu $\mathcal{O}(d)^r$ isomorph ist ($d > 1$), dann klassifiziert eine offene nicht leere Menge $\overline{\mathcal{V}}_d^{r, r_0, r_1}$ in dem affinen Raum folgender Matrizen die Vektorbündel der Stufe 1 in $\mathcal{V}_d^{\mathbb{P}^2}$ vom Rang r und Grad rd generisch bezüglich Isomorphie:

$(rd \times rd)$ -Matrizen K , deren Spalten mit Nummer $\equiv 1 \pmod d$ Null sind, deren $(d \times d)$ -Untermatrix, gebildet aus den Schnittstellen der Spalten mit Nummer $\equiv 0 \pmod d$ und Zeilen $\equiv 1 \pmod d$, diagonal ist mit paarweise verschiedenen Eigenwerten (vgl. Bild 1) und deren Elemente direkt unterhalb der Nebendiagonale der eben beschriebenen Untermatrix 1 sind (in Bild 1 gekreuzt). Den Kroneckermodul des durch K definierten Bündels konstruiert man folgendermaßen: Sei $X := k^{rd}$ und $\overline{X} := k^r$, dann definiere in $k^3 \otimes X \rightarrow \overline{X} \otimes X \otimes X$ die Multiplikation mit $(1,0,0)$ durch die Inklusion von X auf den letzten, die mit $(0,1,0)$ durch die Inklusion auf den mittleren Summanden und die Multiplikation mit $(0,0,1)$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix}$, zusammengesetzt aus K und den oben neben $(*)$ beschriebenen Matrizen I und J . Die durch $\overline{\mathcal{V}}_d^{r, r_0, r_1}$ induzierten Vektorbündel haben Endomorphismenring $= k \cdot (r_0 = rd)$

Um auch Bündel der Stufe > 1 zu erfassen, machen wir die

Definition:

Ein monomiales Vektorbündel der Stufe m auf \mathbb{P}_2 heißt uniform in Stufe 1 bezüglich der Gerade g , wenn die Einschränkung seiner $(m-1)$ -ten Ableitung auf g zu einer Potenz von $\mathcal{O}(d)$ für geeignetes d isomorph ist.

Satz:

Fassen wir $\overline{\mathcal{V}}_d^{r, r_0, r_1}$ in obigem Lemma als Unterschema von $\text{Gr}_{r-r_1}^{r_0}(E \otimes X)$ auf, indem wir eine Basis e_0, e_1, e_2 von E wählen, so daß e_0 der Vektor $(1,0,0)$ in k^3 entspricht und indem wir $K \in \overline{\mathcal{V}}_d^{r, r_0, r_1}$ den Kern des im Lemma definierten

Kroneckermoduls zuordnen. Dann ist $\overline{\mathcal{V}}_d^{r_0, \dots, r_m}$ als Unterschema von $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m}$ generisch ein Fundamentalbereich bezüglich der Isomorphie von $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m}$ bezüglich einer Gerade uniformen Vektorbündeln der Stufe 1, und das Urbild von $\overline{\mathcal{V}}_d^{r_0, \dots, r_m}$ in $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m}$ unter der Projektion $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m} \rightarrow \overline{\mathcal{V}}_d^{r_0, \dots, r_m}$ (Th.2.4) ist generisch ein Fundamentalbereich bezüglich Isomorphie der monomialen Vektorbündel der Stufe m auf \mathbb{P}_2 mit Ranginvarianten r_0, \dots, r_m die univorm in Stufe 1 bezüglich einer Geraden in \mathbb{P}_2 sind.

Beweis:

Wenn ein Vektorbündel in $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m}$ uniform in Stufe 1 bezüglich der Gerade g ist, so zeigt obige Diskussion, daß $d = \frac{r_0}{r_1}$ ist und die Menge der Bündel, deren (m-1)-te Ableitung, auf eine feste Gerade g eingeschränkt, zu $(\mathcal{O}(d))^{r_1}$ isomorph ist, als das Urbild von $\overline{\mathcal{V}}_d^{r_0, \dots, r_m}$ (bez. g) unter $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m} \rightarrow \overline{\mathcal{V}}_d^{r_0, \dots, r_m}$ offen und nicht leer ist. Wählen wir also eine Basis e_0, e_1, e_2 von E, so daß $g = \mathbb{P}(E/ke_0)$ diese Eigenschaften hat!

Wenn zwei Bündel in $\mathcal{V}^{r_0, \dots, r_m}$ isomorph sind, dann auch ihre (m-1)-ten Ableitungen, so daß Bündel über verschiedenen Punkten von $\overline{\mathcal{V}}_d^{r_0, \dots, r_m}$ nicht isomorph sind, und ein Isomorphismus von Bündeln über demselben Punkt F induziert einen Automorphismus von F, der nach dem Lemma ein Skalar ist. Daher sind die (m-2)-ten Ableitungen Kokern derselben Injektion $\mathcal{O} \otimes Y \rightarrow F$ für geeignetes Y, also gleich mit Endomorphismenring = k, und so fortfahrend schließen wir auf die Gleichheit der beiden isomorphen Vektorbündel über F.

Die Wahl der Gerade, auf die eingeschränkt wird, und bei der Klassifikation die Wahl der Gittermatrix und der "Nebendiagonalelemente" sind weitgehend willkürlich. Bei der Variation dieser Daten läßt sich aber nicht das Modulischema für monomiale, in Stufe 1 uniforme Vektorbündel durch Verkleben konstruieren, wie das Beispiel $d = r = 2$ auf \mathbb{P}_2 zeigt.

Anhang:

Einige Schritte hin zur Klassifikation der Endomorphismen von projektiven Räumen

Im Folgenden konstruieren wir einen geometrischen Quotienten für die Operation von $(a, b) \in \text{Aut } \mathbb{P}(E) \times \text{Aut } \mathbb{P}(E)$ auf $f \in \text{End}_d \mathbb{P}(E)$ durch $f \mapsto a \circ f \circ b^{-1}$, wobei f ein (algebraischer) Endomorphismus von $\mathbb{P}(E)$ vom Grad $d \in \mathbb{N}$ ist.

Bekanntlich [Groth., EGA II, 4.2.3] läßt sich jeder Morphismus $f: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ durch eine Surjektion $\mathcal{O} \otimes E' \rightarrow \mathcal{L}$ kennzeichnen, wenn \mathcal{L} ein Geradenbündel auf $\mathbb{P}(E)$ ist. Da $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(d)$ ist für genau ein $d \in \mathbb{N}$, dem "Grad", läßt sich ein Endomorphismus von Grad d durch genau eine Surjektion $\mathcal{O} \otimes E \rightarrow \mathcal{O}(d)$ modulo $\text{Aut}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(d) = G_m$ (multiplikative Gruppe) charakterisieren. Da diese Surjektionen in $\text{Hom}(\mathcal{O} \otimes E, \mathcal{O}(d)) = \text{Hom}(E, S^d(E)) = S^d(E)^{n+1}$ gerade den $(n+1)$ -tupeln von Polynomen ohne gemeinsame Nullstelle entsprechen, ist $\text{Sur}(\mathcal{O} \otimes E, \mathcal{O}(d))$ offenes Unterschema des affinen Raumes $\text{Hom}(E, S^d(E))$, sogar spezielle offene Menge, nämlich die außerhalb des Nullstellengebildes der (homogenen) Resultante R [v.d. Waerden, Algebra II, § 121].

Daher ist $\text{End}_d \mathbb{P}(E)$ spezielle offene Menge eines projektiven Raumes, und obige Operation ist natürlich algebraisch. Außerdem ist die Operation von $a \in \text{Aut } \mathbb{P}(E) = \text{PGL}(E)$ (i) auf dem Wertebereich von $f \in \text{End}_d \mathbb{P}(E)$ mit der von $b \in \text{Aut } \mathbb{P}(E)$ auf dem Definitionsbereich vertauschbar, so daß man die Operationen getrennt als von links und von rechts ansehen kann, d.h. $\text{Aut } \mathbb{P}(E) \times \text{Aut } \mathbb{P}(E) \setminus \text{End}_d \mathbb{P}(E) = \text{Aut } \mathbb{P}(E) \setminus \text{End}_d \mathbb{P}(E) / \text{Aut } \mathbb{P}(E)$.

Wir behandeln hier den Fall der Operation auf dem Wertebereich, während der auf dem Definitionsbereich sich als die klassische Operation von $\text{SL}(E)$ auf $S^m(E)$ herausstellt.

Lemma :

Der geometrische Quotient $PGL(E) \backslash \text{End}_d P(E)$ existiert und ist eine offene Teilmenge einer Graßmannmannigfaltigkeit

$Gr_{n+1, N}$ mit $N = \dim S^d(E)$ und $\pi: \text{End}_d P(E) \rightarrow PGL(E)$ $\text{End}_d P(E)$ ist ein Hauptfaserbündel im étalen Sinn.

Beweis:

Zunächst bemerken wir, daß $\text{Sur}(\mathcal{O} \otimes E, \mathcal{O}(d))$ kanonisch in $\text{Inj}(E, S^d(E))$, den linearen Injektionen von $\text{Hom}(E, S^d(E))$ enthalten ist und also auch darin die durch die Resultante R definierte spezielle offene Menge darstellt. Da $GL(E) \times GL(S^d(E))$ transitiv auf $\text{Inj}(E, S^d(E))$ operiert, sind die Injektionen Bahn eines Elementes f in $\text{Sur}(\mathcal{O} \otimes E, \mathcal{O}(d))$, so daß $\text{End}_d P(E)/PGL(E) = \text{Sur}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \otimes E, \mathcal{O}(d))/GL_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \otimes E) = \text{Inj}(E, S^d(E))_R/GL(E) \cong ((GL(E) \times GL(S^d(E)) \cdot f)_R/GL(E)$ ist. Es ist klar, daß die Gerade $k \cdot R$ (R explizit in [Lang, Algebra, S. 135] für $\dim E = 2$) invariant unter $GL(E)$ ist, so daß schließlich $\text{End}_d P(E)/PGL(E) = (GL(S^d(E)) \cdot f)_R = (GL(S^d(E))/\text{Stab}(f))_R$ und nach der Standardtheorie für halbeinfache Gruppen für geeignetes f étale homomorph ist zu einer offenen Menge einer Graßmannmannigfaltigkeit $Gr_{n+1, N}$.

Damit haben wir die Existenz des Quotienten bewiesen, er ist aber sogar auf natürliche Weise beschreibbar. Die Idee hierzu liefert das Lemma 1.5, wonach die einen Morphismus von Grad d beschreibende Surjektion $\mathcal{O} \otimes E \rightarrow \mathcal{O}(d)$ kanonisch zu einer Erweiterung $\mathcal{E}(f)$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-n+1)d \otimes \bigwedge^{n+1} E \rightarrow \mathcal{O}(-nd) \otimes \bigwedge^n E \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}(-2d) \otimes \bigwedge^2 E \rightarrow \mathcal{O}(-d) \otimes E \xrightarrow{f(-d)} \mathcal{O} \rightarrow 0$$

gemacht werden kann, nachdem sie mit $\mathcal{O}(-d)$ tensoriert wurde.

Die entsprechende Abbildung $\mathcal{E}: \text{Sur}(\mathcal{O} \otimes E, \mathcal{O}(d)) \rightarrow \text{Ext}^n(\mathcal{O}, \bigwedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E))$ bezeichnen wir auch mit \mathcal{E} , ebenso wie wir dasselbe Zeichen f für $f \in \text{End}_d P(E)$ und einem dazugehörigen $f: \mathcal{O} \otimes E \rightarrow \mathcal{O}(d)$ verwenden. $\text{Ext}^n(\mathcal{O}, \bigwedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)) = H^n(\bigwedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E))$ ist nach Standardtheorie ein affiner Raum (vgl. z.B. Satz 3.3) und \mathcal{E} als funktorielle Abbildung ein algebraischer Morphismus. Modulo G_m erhalten

wir einen Morphismus $P(E): \text{End}_D P(E) \rightarrow P(\text{Ext}^n(\mathcal{O}, \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)))$. Daß $\mathcal{E}(f)$ niemals \emptyset sein kann, liegt daran, daß $\mathcal{O}(-d)$ keine nichttrivialen Schnitte hat.

Hauptsatz:

$P(E): \text{End}_D P(E) \rightarrow P(\text{Ext}^n(\mathcal{O}, \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)))$ induziert einen geometrischen Quotienten für die Operation von $\text{PGL}(E)$ auf $\text{End } P(E)$ von links, wenn $\text{char } k > (n+1)(d-1)$ ist.

Beweis:

Der Satz ist richtig, wenn wir zeigen:

1. \mathcal{E} ist konstant auf den Bahnen von $\text{GL}(E)$ (als algebra. Morphismus) modulo G_m ,
2. $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(f))$ enthält höchstens eine $\text{GL}(E)$ -Bahn,
3. der Abschluß von $\text{Bild } \mathcal{E}$ ist normal.

Dann nämlich ist $P(E)$ nach [Mumford, GIT, prop. o.2] ein geometrischer Quotient auf das Unterschema $\text{Bild } \mathcal{E} / G_m$.

Beweis von Behauptung 1:

Seien f und g zwei durch a in $\text{GL}(E)(A)$ konjugierte Surjektionen. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-d) \otimes E & \xrightarrow{f(-d)} & \mathcal{O} \\ \downarrow \mathcal{O}(-d) \otimes a & & \downarrow \mathcal{O}(-d) \otimes a \\ \mathcal{O}(-d) \otimes E & \xrightarrow{g(-d)} & \mathcal{O} \end{array}$$

kommutativ und es läßt sich offenbar fortsetzen zu einem Morphismus zwischen Erweiterungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{O}(-m)d \otimes \wedge^m E & \rightarrow & \mathcal{O}(-n)d \otimes \wedge^n E & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{O}(-2d) \otimes \wedge^2 E \rightarrow \mathcal{O}(-d) \otimes E \xrightarrow{f(-d)} \mathcal{O} \rightarrow 0 \\ & \downarrow \text{id} \otimes \wedge^m a & \downarrow \text{id} \otimes \wedge^n a & \dots & \downarrow \text{id} \otimes \wedge^2 a & \downarrow \text{id} \otimes a & \parallel \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}(-m)d \otimes \wedge^m E & \rightarrow & \mathcal{O}(-n)d \otimes \wedge^n E & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{O}(-2d) \otimes \wedge^2 E \rightarrow \mathcal{O}(-d) \otimes E \xrightarrow{g(-d)} \mathcal{O} \rightarrow 0 \end{array}$$

Das bedeutet, daß die durch g bestimmte Erweiterungsklasse das $\wedge^{n+1} a$ -Vielfache der durch f definierten Klasse ist, wobei $\wedge^{n+1} a \in G_m(A)$ ist. Das heißt aber daß $\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(g)$ gilt (im funktoriellen Sinne).

Beweis von Behauptung 2:

Wenn $\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(g)$ ist, sind also die Erweiterungen von $f(-d): \mathcal{O}(-d) \otimes E \rightarrow \mathcal{O}$ und $g(-d): \mathcal{O}(-d) \otimes E \rightarrow \mathcal{O}$ äquivalent. Das bedeutet i.a., daß sie durch eine Kette von Homomorphismen zwischen Erweiterungen verbunden sind. Wir

können aber einen Homomorphismus direkt zwischen ihnen konstruieren (modulo G_m).

Dazu ergänzen wir das Diagramm $\mathcal{O}(-d) \otimes E$ durch den gestrichelten Pfeil, was zum Nachweis von Beh. 2 genügt.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-d) \otimes E & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{O}(-d) \otimes E & \longrightarrow & \mathcal{O} \end{array}$$

Er existiert, wenn in der exakten Sequenz

$$\text{Hom}(\mathcal{O}(-d) \otimes E, \mathcal{O}(-d) \otimes E) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}(-d) \otimes E, \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}(-d) \otimes E, \mathcal{O})$$

$$h \longmapsto f(-d) \circ h = \text{Hom}(\mathcal{O}(-d) \otimes E, f(-d)(h)) \text{ (Ker } f(-d))$$

ein $f(-d) \circ h = g(-d)$ ist, d.h. wenn das Bild von $g(-d)$, das Faserprodukt von $(*) \circ \rightarrow \text{ker } f(-d) \rightarrow \mathcal{O}(-d) \otimes E \xrightarrow{f(-d)} \mathcal{O} \rightarrow 0$ mit $g(-d)$, äquivalent Null ist. Das zeigen wir wie folgt:

Aufgrund der Funktorialität der Erweiterungsgruppen und der Kohomologie von $\wedge^k(\mathcal{O}(-d) \otimes E) = \mathcal{O}(-kd) \otimes \wedge^k E$ (1.5) ist

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}^1(\mathcal{O}, \text{ker } f(-d)) & \longrightarrow & \text{Ext}^n(\mathcal{O}, \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)) \\ \downarrow \text{Ext}^1(g(-d), \text{ker } f(-d)) & & \downarrow \text{Ext}^n(g(-d), \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)) \\ \text{Ext}^1(\mathcal{O}(-d) \otimes E, \text{ker } f(-d)) & \longrightarrow & \text{Ext}^n(\mathcal{O}(-d) \otimes E, \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit horizontalen Injektionen.

Gehen wir aus von der Klasse der Erweiterung $(*)$. Deren Bild ist in $\text{Ext}^n(\mathcal{O}, \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E))$ gerade $\mathcal{E}(f)$, nach

Voraussetzung = $\mathcal{E}(g)$. Das Bild von $\mathcal{E}(g)$ unter $\text{Ext}^n(g(-d), \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E))$, das ist das Faserprodukt von $\mathcal{E}(g)$ mit $g(-d)$, ist Null. Daher ist auch das Faserprodukt von $(*)$ mit $g(-d)$ Null und also das gewünschte $h: \mathcal{O}(-d) \otimes E \rightarrow \mathcal{O}(-d) \otimes E$ existent.

Es ist klar, daß $h = \mathcal{O}(-d) \otimes a$ ist für ein $a \in \text{GL}(E)$, so daß f und g in derselben Bahn von $\text{GL}(E)$ liegen. Außerdem kann man h zwischen $\mathcal{E}(g)$ und

$\mathcal{E}(f)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung definiert einen Homomorphismus bis auf den Faktor $\wedge^{n+1} a$. Diese Argumente sind offenbar auch für beliebige Skalarerweiterungen gültig.

2. Schritt:

Wir charakterisieren jetzt das Bild λ von f nur mittels f . Die Abbildung λ ist wegen der Eindeutigkeitsaussage schon durch das linke Viereck des Diagramms $D_E(f, \lambda)$, das wir unter Benutzung von $\Lambda^n \Omega = \mathcal{O}(-n+1) \otimes \Lambda^{n+1} E$ und

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n+1} E^* \otimes \Lambda^n E & \xrightarrow{\sim} & E^* \text{ als} \\ \Lambda^n \Omega \otimes S^m(E) & \xrightarrow{\omega} & (\Lambda^{n-1} \Omega)(-1) \otimes S^{m+1}(E) \\ \downarrow \Lambda^n \Omega \otimes \lambda & & \downarrow \mu \\ \Lambda^n \Omega & \xrightarrow{\Lambda^n \Omega \circ f} & \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E \end{array}$$

schreiben können, bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.

Um eine Bedingung an λ unabhängig von μ formulieren zu können, wenden wir auf E den Funktor $\text{Hom}(\ , \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E)$ an und erhalten mit Hilfe von Lemma 1.7 die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \text{Hom}((\Lambda^{n-1} \Omega)(-1) \otimes S^{m+1}(E), \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E^*) &\rightarrow \text{Hom}(\Lambda^n \Omega \otimes S^n E, \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E^*) \\ \mu \mapsto \mu \circ \omega & \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(\text{Bild } \omega, \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E^*) \end{aligned}$$

Also gibt es zu einem Paar (f, λ) ein μ , das obiges Diagramm kommutativ ergänzt, genau dann wenn das Bild von $(\Lambda^n \Omega \otimes f(-d)^*) \circ (\Lambda^n \Omega \otimes \lambda)$ in $\text{Ext}^1(\text{Bild } \omega, \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E) \subset_{\text{kan}} \text{Ext}^n(\mathcal{O}(m), \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E^*)$ verschwindet.

Die kanonische Inklusion kommt durch Verlängerung der 1-Erweiterung mit Hilfe des "Restes von E " zustande, d.h. das Bild in $\text{Ext}^n(\mathcal{O}(m), \Lambda^n \Omega \otimes \mathcal{O}(d) \otimes E^*) = \text{Ext}^n(\mathcal{O}(m-d), \Lambda^n \Omega) \otimes E^*$ ist $\text{Ext}^n(\mathcal{O}(m), \Lambda^n \Omega \circ f(-d)^*) \cdot (\lambda_* \mathcal{E}) = \text{Ext}^n(\mathcal{O}(m) \circ f(-d), \Lambda^n \Omega) (\lambda_* \mathcal{E})$ (Bezeichnungen von Satz 3.3). Hierbei fassen wir die Anwendung von $f(-d) \in \text{Hom}(\mathcal{O}(-d) \otimes E, \mathcal{O}) = S^d(E) \otimes E^*$ als "komponentenweise äußere" Multiplikation der Komponenten von $\lambda_* \mathcal{E} \in \text{Ext}^n_{\mathcal{R}} E^*$ bezüglich einer Basis von E^* mit den entsprechenden Komponenten von $f(-d) \in S(E) \otimes_{\mathcal{R}} E^*$ auf.

Tatsächlich ist $\text{Ext}^n := \coprod_{\substack{\text{auf} \\ m \in \mathbb{N}}} \text{Ext}^n(\mathcal{O}(m), \Lambda^n \Omega)$ ein graduerter Modul über $S(E)$, wobei ein Element f in $S^d(E) = \text{Hom}(\mathcal{O}(d), \mathcal{O}(m+d))$ durch $\text{Ext}^n(f, \Lambda^n \Omega) = \text{Ext}^n(\mathcal{O}(m), \Lambda^n \Omega \otimes f^*)$ ähnlich der Multiplikation des k -Moduls $\text{Ext}^n(\mathcal{O}(m), \Lambda^n \Omega)$ operiert. Um den Formalien genüge zu tun,

muß man die graduierten Komponenten von Ext^n negativ nummerieren, da Multiplikation mit f sonst graderniedrigend wirkte. (Hier werden auch die kanonischen (funktoriellen) Isomorphismen $\text{Ext}^n(F \otimes \mathcal{L}^*, G) = \text{Ext}^n(F, G \otimes \mathcal{L})$ frei verwendet (\mathcal{L} = invertierbarer $P(E)$ -Modul).) Die Serre-Isomorphismen lassen sich dann als Modulisomorphismen zwischen $S(E)^* = \coprod_{m \in \mathbb{N}} S^m(E)^*$ und Ext^n zusammenfassen. Auf $S(E)^*$ operieren die Elemente von $S(E)$ als Differentialoperatoren, wenn man die Gradierung positiv (1) numeriert, durch $S^d(E) \otimes S^m(E)^* \rightarrow S^d(E) \otimes S^d(E)^* \otimes S^m(E)^* \rightarrow S^{m-d}(E)^*$. Der erste Pfeil wird durch das Duale der Multiplikation in $S(E)$ induziert. Daher ist das Bild von $f(-d) (\lambda_* \mathcal{E})$ unter dem Serre-Isomorphismus gleich $f(-d) \cdot \lambda \in S^{m-d}(E)^* \otimes E^*$. Da wir $f(-d)$ auch auf kanonische Weise als $f \in \text{Hom}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}(d)) = E^* \otimes S^d(E)$ ansehen können, erhalten wir das

Lemma 2:

Das in Lemma 1 beschriebene Element ist bis auf einen Faktor durch das System von homogenen "Differentialgleichungen" $f \cdot \lambda = 0$ bestimmt, wobei die Multiplikation durch das Duale der Multiplikation in $S(E)$ über $E^* \otimes S^d(E) \otimes S^m(E)^* \rightarrow E^* \otimes S^d(E) \otimes S^d(E)^* \otimes S^{m-d}(E)^* \rightarrow E^* \otimes S^{m-d}(E)^*$ definiert ist. Insbesondere ist Bild $P(E)$ abgeschlossen.

Beweis:

Soweit sich die Behauptungen nicht auf die Isomorphie und Modulstruktur von $S(E)^*$ und Ext^n über $S(E)$ beziehen, sind sie besprochen worden. Der Rest ist reine Routineangelegenheit.

3. Schritt:

Wir geben mit der Lösung der Differentialgleichung $f \cdot \lambda = 0$ eine explizite Beschreibung von λ und zeigen dann, daß \mathcal{E} ein glatter Morphismus auf $\text{Bild } \mathcal{E}$ ist. Dann ist das Bild auch glatt, also normal.

Die Lösung λ wird durch die Tatsache nahegelegt, daß die Abbildung $\text{Hom}(E, V) \rightarrow \text{Hom}(\wedge^{n+1} E, \wedge^{n+1} V)$ einen kategorischen Quotienten bezüglich der Operation von $SL(E)$

induziert [H. Weyl, Klassische Gruppen]. Falls $V = E$ ist, ist das genau die Determinante. Für $f \in E \otimes S^d(E^*)$, das wir als Polynomfunktion ansehen können, wählen wir die "Funktionaldeterminante" als Kandidaten für $E(f)$. Sie ist definiert durch $E \otimes S^d(E^*) \xrightarrow{\cong} E \otimes E^* \otimes S^{d-1}(E^*) \xrightarrow{\text{Det}_d} S^{(n+1)(d-1)}(E^*)$
 $\sum x_i \otimes f_i \mapsto \sum x_i \otimes e_j \otimes \partial_{x_j} f_i \mapsto \sum \text{sgn} \sigma \prod_{k=1}^n \partial_{x_k} f_{\sigma(k)}$
 $\xrightarrow{\cong} S^{(n+1)(d-1)}(E^*)^*$, wenn e_1 eine Basis von E^* und x_1 die Dualbasis ist. Die kanonische Abbildung $S^m(E^*) \rightarrow S^m(E)^*$ ist nur für $\text{char } k > m$ ein Isomorphismus.

Die Funktionaldeterminante läßt sich auch abstrakt und auf $P(E^*)$ geometrisch interpretieren:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(U \otimes E^*, U(d)) &\rightarrow \text{Hom}(U \otimes E^*, E^* \otimes U(d-1)) \rightarrow \text{Hom}(U, U^{(n+1)(d-1)}) \\ f &\mapsto \partial f && \mapsto \wedge^{n+1} E^* \otimes \wedge^{m-1} \partial f \end{aligned}$$

Die lineare Abbildung ∂ ist die totale Ableitung von Polynomfunktionen f und ist injektiv. Sie ist komponentenweise abstrakt definiert als Zusammensetzung $S^d(E^*) = S^d(E)^* \rightarrow E^* \otimes E \otimes S^{d-1}(E)^* \rightarrow E^* \otimes S^{d-1}(E)^*$, wobei der letzte Pfeil durch die oben beschriebene Operation von $S(E)$ auf $S(E)^*$ definiert ist.

Lemma 3:

$\text{Det}_d \partial f$ ist eine Lösung der in Lemma 2 beschriebenen Differentialgleichung.

Dies ist klar, und damit ist $P(E(f)) = k \cdot \text{Det}_d \partial f$ auf den rationalen Punkten. Daher ist $P(E(f))$ glatt auf ihr Bild, wenn $\text{Det}_d \partial$ es ist.

Da ∂ injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß $\text{Det}_d \partial$ glatt ist. Diese Abbildung ist Einschränkung von $\text{Det}: \text{GL}(E) \otimes S(E^*) \rightarrow S(E^*)$ und letztere kann man als Weyl-Restriktion der gewöhnlichen Determinante auf $\text{GL}(E)$ mit Koeffizienten im Quotientenkörper von $S(E)$ auffassen. Da $\text{Quot } S(E)$ frei über k ist, folgt alles aus der Glattheit der Determinante nach [DG I, § 4, n°4, Cor 4.8]. Damit ist der 3. Schritt, also der Hauptsatz bewiesen, der nach Lemma 0, 1, 2 und 3 auch folgendermaßen formuliert werden kann:

Hauptsatz (2. Fassung):

Sei char $k > (n+1)(d-1)$. Der anfangs beschriebene Morphismus $P(E): \text{End}_D P(E) \rightarrow P(\text{Ext}^n(\mathcal{O}, \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)))$

wird induziert durch den Morphismus

$$E \otimes S^d(E^*) \rightarrow S^{(n+1)(d-1)}(E^*) \quad (\text{char } k \text{ beliebig!}),$$

$$f \mapsto \text{Det}_D f$$

die Funktionaldeterminante der algebraischen Abbildung

$f: A(E) \rightarrow A(E)$. $P(E)$ ist als Morphismus auf sein Bild

glatt, Hauptfaserbündel und geometrischer Quotient für die

Operation von $a \in \text{Aut } P(E)$ auf $f \in \text{End}_D P(E)$ durch $f \mapsto a \circ f$.

Zusatz:

$P(E)$ ist äquivariant in Bezug auf die Operation von $a \in \text{Aut}$

$P(E)$ auf $f \in \text{End}_D P(E)$ durch $f \mapsto f \circ a$ und der natürlichen

Operation auf $\text{Ext}^n(\mathcal{O}, \wedge^{n+1}(\mathcal{O}(-d) \otimes E)) = S^{(n+1)(d-1)}(E^*)$.

Mit Hilfe der Beschreibung von $P(E)$ durch die Funktionaldeterminante ist der Zusatz sofort deutlich, wenn man bedenkt, daß die Operation auf $\text{End}_D P(E)$ durch die natürliche Operation auf dem zweiten Faktor (id auf dem ersten) von $E \otimes S^d(E^*)$ induziert wird.

Daher hat man es bei der Bestimmung des Quotienten $\text{Aut } P(E) \backslash \text{End}_D P(E) / \text{Aut } P(E)$ mit dem klassischen Problem der Bestimmung der eigentlich stabilen Punkte (im Sinne Hilbert-Mumfords) von Hyperflächen zu tun, das sich i.a. als besonders schwierig erweist (vgl. [GIT, ch 4, § 2]). Hier hat man Funktionaldeterminanten zu klassifizieren, deren geometrische Eigenschaften eng mit den Eigenschaften der Verzweigungspunkte von f verknüpft sind.

Indem man die Endomorphismen von $P(E)$ klassifiziert, hat man evtl. auch neue und vor allem übersichtliche Instrumente zur Konstruktion von neuen Vektorbündeln auf $P(E)$ durch $f_* (\mathcal{O}(m))$ oder $f_* (\mathcal{O}(m))$ usw. Hier eröffnen sich zweifellos neue interessante Probleme und Zusammenhänge.

Literatur:

Zitate erscheinen im Text abgekürzt. Extreme Abkürzungen sind hier in Klammern angegeben.

- M. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc London Math Soc (3), 7, 1957
- W. Barth, Some properties of stable rank-2-vektor bundles on P_n , Math. Ann. 226, 1977
Moduli of vektor bundles on the projective plane
Mathem. Institut Univ. Erlangen, 1977
- N. Bourbaki, Algebre, chap 1-3, Paris 1970 (AL)
- C. Chevalley, Seminaire: Anneaux de Chow et applications
Secr. math., Paris 1958
- M. Demazure, P. Gabriel, Groupes algebriques, Paris 1970 (DG)
- S. McLane Homology, Berlin 1963
- R. Godement, Topologie algebrique et theorie des faisceaux
Paris 1958
- F.R. Gantmacher, Matrizenrechnung II, Berlin 1959
- A. Grothendieck, Sur quelques points d'algebre homologique
Tôhoku math. J., vol 9, 1957
Éléments de géométrie algébrique (EGA)
Publ. math. 4, 8, 11, 17, 20, Paris 1960 f
- F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry
New York, 1966
- G. Horrocks, Vector bundles on a punctured spectrum of a local ring, Proc London Math Soc, vol XIV, 1964
- M. Marayuma, Stable vector bundles on an algebraic surface
Nagoya math. J., 58, 1975
- R. Mulczinski, Moduln und Endomorphismen der projektiven Geraden, Diplomarbeit Bonn, 1973
- D. Mumford, Introduction to algebraic geometry (ITAG)
Harvard Uni-Press

- D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface
Princeton, New Jersey, 1966 (LOCOAS)
Abelian varieties, Oxford 1970
Geometric invariant theory, Berlin 1965 (GIT)
- R. Schwarzenberger, Vector bundles on the projective plane
Proc London Math Soc, 11, 1961
- Seminaire des assistants, Inst Math, Strasbourg, 1964/65
- J.P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents (FAC)
Annals of Mathem., vol 61, 1955
- Shafarevicz, Basic algebraic geometry (BAG)
Grundzüge der alg. Geometrie, Braunschweig 1972
- v.d. Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie
Berlin 1973 (EAG)
Algebra II, Berlin 1959
- V. Dlab, Indecomposable representations of graphs
C.M.Ringel an algebras, Providence 1976

Index:

affiner Raum	0.0
Auflösung, universelle	2.6
assoziierter Modul	3.5
abgeleitetes Bündel, Ableitung	4.2
Bündel = Vektorbündel	0.2
besonders stabil	5.2
Chernklasse, -charakter	3.2 [Hirzebruch]
Charakter, Stabilität testend	[Mumford, GIT]
dualer proj. Raum	0.0
Differentialbündel	1.3
Einschränkung	3.5
exakt (Vektorbündelsequenz)	0.7
Erweiterung, universelle	4.3
Faser	0.2, 0.3
faserweise injektiv	0.4
geometrischer Punkt	0.1
global erzeugt	1.5
globale Schnitte	1.4
generisch = sich auf eine offene dichte Menge beziehend	
Grad (eines Bündels auf \mathbb{P}_n)	4.2
(eines Morphismus)	A.1
Geradenbündel	0.7, 1.1
Hopf-Bündel	1.2
Halm	0.2
halmweise injektiv = injektiv	0.2
induzierter $P(E)$ -Modul	2.4
Kroneckermodul (über E)	2.3
(eines $P(E)$ -Moduls)	2.2
Komplex, universeller	2.6
Kern (eines Homom. von Bündeln)	0.3 - 0.5
Modulischema	[Mumford, GIT]
Monomorphismus (\mathcal{X} -Modul) =	0.2
Injektion	
monomial	5.3
m-te universelle Erweiterung	4.3
(Ableitung)	

projektiver Raum	0.0
Punkt	0.1
$\mathcal{O}(E)$ -Modul	0.3
(eines Kroneckermoduls)	2.4
polynomial(Vektorbündel)	4.2.2
Rang	0.2, 0.5
regulär	3.5
symmetrische Algebra	1.5.1, 0.7
surjektiv	0.2
Schnittfunktor	1.4
Schnitt, globaler	1.4
Schnittmodul	2.1
symmetrische Potenz	0.7
Stufe	4.3.2
stabil	5.2 [Mumford, GIT]
Tangentialbündel	1.3
tautologisches Bündel	1.1
torsionsfrei (Kroneckermodul)	3.5
triviales Vektorbündel	0.5
Toddpolynom	[Hirzebruch]
Tensorprodukt (von Vektorbündeln)	0.7
universelle Auflösung	2.6
universelle Erweiterung	4.3
universeller Komplex	2.6
uniform in Stufe 1	5.7
Vektorbündel	0.2, 0.5
Verschiebung (eines Vektorbündels)	1.1
(eines Kroneckermoduls)	3.4
(eines graduierten Moduls)	3.4
\otimes -Modul	0.3
\otimes -Modulgarbe	0.2

Zeichen:

k	Grundkörper	
E	Grundvektorraum über k	
$n+1$	Dimension von E	
$P(E)$	projektiver Raum über E	0.0
$A(E)$	affiner Raum über E	0.0
$Gr_p(V)$,	Grassmannmannigfaltigkeit (p wird weggelassen,	
$Gr(V)$	falls p klar oder unwichtig ist)	
$S^m(V)$	m -te Komponente der graduierten Algebra $S(V)$	
$Mod^X, \mathcal{A}b^X$		0.3, 0.5
$Mod^E, \mathcal{A}b^E$		2.3
$F(H)$	Faser über H	0.2, 0.3
Γ	Schnitttraum	1.4
$S^m(F)$	symmetr. Potenz eines Bündels	0.7
$F \otimes G$	Tensorprodukt von Bündeln	0.7
$F \otimes V$	Tensorpr. mit einem Vektorraum	0.7
$\wedge^m F, F^*$	äußere Potenz, Duales	0.7
$\mathcal{O}(m)$		1.1
$F(m)$	$\mathcal{I} = F \otimes \mathcal{O}(m)$	
$\Omega, \wedge^m \Omega$	Differentialmoduln	1.3, 1.6
$\mathcal{A}b_o^E, \mathcal{A}b_o$		2.7
Mod_o^E, Mod_o		2.7
H^i, Γ, Ext^i		1.4
$e \cdot s$	$e \in E, s =$ Schnitt	2.1
\wedge	Multipl. im äußeren Punkt oder Auslassungszeichen (über Buchstaben)	
$Kron^E, Kron$		2.3
$Kron_o$		2.7.2

	1. Duales	
	2. 1_{*F} Ausdehnung eines X -Moduls	3.2 [Borel, Serre]
K	Kroneckermodulbildung	2.2
\mathcal{U}	$P(E)$ -Modulbildung	2.4
Grad^E , Grad	Kategorie der grad. $S(E)$ -Moduln	
Grad	Grad eines Bündels	4.2
$ $	Einschränkung von	
$Z E/E_0$	Kroneckermoduln	3.5
$F P(E)/E_0$	$P(E)$ -Moduln	3.5
$X E/E_0$	graduierten $S(E)$ -Moduln	3.5
$\gg 0$	$m \gg 0 \iff \exists m_0 \forall m \geq m_0 \dots$	
$T(X)$, $T(P(E))$	Toddpolynome	3.2
$1_1, 1_1!$		3.2
$?(m)$	Verschiebung	3.4
	(eines Bündels)	1.1
$X(?)$	(auf Kroneckermoduln)	3.5
	(auf $P(E)$ -Moduln)	2.1
$?_m$	1. m -te Komponente eines grad. Moduls	
	2. (P_{-m}) m -tes abgeleitetes Vb.	4.2
	3. Index	
P_{-m}	abgeleitetes Bündel von P	4.2
P	Polynom eines polynomialen Vb.	4.3
δ	Ableitung auf $Z^2[T]$	4.3
$\mathcal{A}_P^r, \mathcal{A}^r, \dots, \mathcal{A}^m$	Schemm von polynomialen Bündeln	4.5, 5.3
u_m, y_m, z_m, r_m		4.5
\overline{P}	(über Zeichen): 1. Restklasse	
	2. (speziell)	5.1
$\mathcal{A}_P^r, \dots, \mathcal{A}^m$	Schemm von monomialen Bündeln	5.3
c_1, c_2	Chernklassen (in Z)	[Hirzebruch]
	$c_1 = \text{Grad}$	
$\mathcal{A}_d^r, \mathcal{A}^r$	Schemm von Vektorbündeln	5.7